$$ds^2 = a(V_1)\,ds_1^2, \tag{65.3}$$
$$ds^2 = a(V_2)\,ds_2^2. \tag{65.4}$$

Рассматривая непосредственно системы K' и K'', можно записать:

$$ds_1^2 = a(V_{12})\,ds_2^2, \tag{65.5}$$

где V_{12}—модуль скорости системы K' относительно K''. Подставляя последнее выражение в формулу (65.3) и сравнивая с формулой (65.4), находим:

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \tag{65.6}$$

Поскольку V_{12} зависит не только от модулей векторов V_1 и V_2, но и от угла между ними (а этот угол вообще не входит в последнее соотношение), очевидно, что удовлетворить соотношению (65.6) можно тогда, когда коэффициент a сводится просто к постоянной величине; постоянная a, как это ясно из последнего равенства, может быть равна только единице. Поэтому $ds^2 = ds'^2$. Поскольку в случае распространения светового сигнала из $s_{12} = 0$ следует $s'_{12} = 0$, то из равенства бесконечно малых интервалов вытекает равенство конечных интервалов: $s = s'$. Это значит, что для преобразований координат и времени, согласующихся с постулатами СТО, интервал должен быть инвариантной величиной. Мы увидим, что такими преобразованиями как раз и являются преобразования Лоренца.

Итак, выражение $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ должно оставаться неизменным при переходе от системы K к K'. Когда системы K и K' расположены так, как это изображено на рисунке 85, $y = y'$, $z = z'$ и сумма $y^2 + z^2$ уже является инвариантом. Поэтому инвариантом преобразования фактически будет выражение

$$s^2 = c^2t^2 - x^2.$$

§ 66. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Выпишем еще раз прямые и обратные преобразования Лоренца:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \Gamma(x - Vt), & x &= \Gamma(x' + Vt'), \\ y' &= y, & y &= y', \\ z' &= z, & z &= z', \\ t' &= \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), & t &= \Gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right). \end{aligned}\right| \tag{66.1}$$

Отметим основные следствия, непосредственно вытекающие из этих преобразований.

1. Преобразования Галилея получаются из преобразований Лоренца при следующих условиях:

а) относительная скорость систем отсчета должна быть нерелятивистской $\beta=\frac{V}{c}\ll 1$, откуда

$$\Gamma=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\approx 1.$$

Тогда

$$x'=x-Vt.$$

б) $\frac{V}{c}\cdot\frac{x}{c}\ll t$; это условие накладывается на переход к преобразованиям Галилея $t'=t$; скорость систем отсчета нерелятивистская, время распространения света в той области, где происходят интересующие нас события, тоже должно быть мало.

Итак, при определенных условиях формулы преобразований Лоренца переходят в формулы преобразований Галилея. Для этого необходимо, чтобы относительные скорости систем отсчета были нерелятивистскими.

2 Пусть два события I и II наблюдаются в системах K и K':

I. $(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1)$; $(x_1',\ y_1',\ z_1',\ t_1')$.

II. $(x_2,\ y_2,\ z_2,\ t_2)$; $(x_2',\ y_2',\ z_2',\ t_2')$.

Введем обозначения для разности координат:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x&=x_2-x_1, & \Delta x'&=x_2'-x_1',\\ \Delta y&=y_2-y_1, & \Delta y'&=y_2'-y_1',\\ \Delta z&=z_2-z_1, & \Delta z'&=z_2'-z_1',\\ \Delta t&=t_2-t_1, & \Delta t'&=t_2'-t_1'. \end{aligned}\right| \qquad (66.2)$$

Из преобразований Лоренца вытекает определенное соотношение для разности координат двух событий:

$$x_2'=\Gamma(x_2-Vt_2),\quad x_1'=\Gamma(x_1-Vt_1),$$
$$\Delta x'=x_2'-x_1'=\Gamma(\Delta x-V\,\Delta t).$$

Для разности координат событий получаем соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x'&=\Gamma(\Delta x-V\,\Delta t), & \Delta x&=\Gamma(\Delta x'+V\,\Delta t'),\\ \Delta y'&=\Delta y, & \Delta y&=\Delta y',\\ \Delta z'&=\Delta z, & \Delta z&=\Delta z',\\ \Delta t'&=\Gamma\left(\Delta t-\frac{V}{c^2}\,\Delta x\right), & \Delta t&=\Gamma\left(\Delta t'+\frac{V}{c^2}\,\Delta x'\right). \end{aligned}\right| \qquad (66.3)$$

Все следствия постулатов СТО могут быть получены из преобразований Лоренца, так как эти преобразования есть следствия двух постулатов СТО

Относительность длин. Пусть в системе K' на оси X' зафиксированы две точки x_1' и x_2'. Расстояние между ними, измеренное в системе K', — собственная длина (масштаб на оси X'): $x_2'-x_1'=l_0$.

В системе K, относительно которой масштаб движется, длина масштаба l равна: x_2-x_1 (x_2 и x_1 отмечаются одновременно в системе K).

Из соотношений (66.3) имеем: $\Delta x' = \Gamma(\Delta x - V\Delta t)$. Положим $\Delta t = 0$, тогда

$$l_0 = \Gamma l.$$

Мы второй раз получили формулу

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (66.4)$$

Длина масштаба оказывается разной, если ее измерять в разных системах отсчета, находящихся в относительном движении. Длина масштаба не имеет смысла, если не указывать систему отсчета, в которой она измеряется.

В каждой системе отсчета (не собственной) длина линейки определяется формулой $l = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$. Если ставить физический эксперимент так, что физическая система будет двигаться относительно приборов, то все длины, которые нужно использовать для интерпретации наблюдений, изменяются по сравнению с собственной именно по этой формуле.

Так как все ИСО равноправны, то и все длины, полученные в различных ИСО, относящиеся к одному и тому же объекту, имеют равноправный физический смысл. Различие в длинах, обнаруживаемое в разных ИСО, связано с относительностью одновременности.

Относительность одновременности. Пусть в системе K два события одновременны, т. е. $t_1 = t_2$, или $\Delta t = 0$, но согласно *соотношениям* (69.3)

$$\Delta t' = \Gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right) = -\Gamma\frac{V}{c^2}\Delta x = -\Gamma\frac{V}{c}\frac{\Delta x}{c} \neq 0.$$

Относительностью одновременности можно пренебречь, когда $\left(\frac{V}{c}\right)$ и $\left(\frac{\Delta x}{c}\right)$ малы.

Собственное время. Пусть в системе K два события произошли в одной и той же точке пространства $\Delta x = 0$. Тогда $\Delta t = \Delta\tau$ — промежуток собственного времени. Но согласно формуле (67.3)

$$\Delta t' = \Gamma\,\Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Относительность времени давно получила прямое экспериментальное подтверждение. В 1938 г. в космических лучах была обнаружена частица μ-мезон. Ее обнаружили и на ускорителях. Время жизни μ-мезона, полученного на ускорителе, $\tau_0 = 2\cdot 10^{-6}$ с. Если мезон медленный $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$, а на ускорителе получают медленные мезоны, то τ_0 можно считать собственным временем жизни мезона.

Мезоны вторичных космических лучей возникают при взаимодействии космических протонов с атмосферой; они возникают на высоте 5—6 км и движутся с релятивистскими скоростями. Поток космических мезонов обнаруживается и на уровне моря. Следовательно, 5—6 км μ-мезоны могут пройти без распада. Путь, проходимый мезоном от места его рождения, Δx равен $V \cdot \Delta t$ (Δt — время жизни мезона в системе K — Земля). Если Δt совпадало бы с τ_0, то даже при движении со скоростью света μ-мезон прошел бы всего лишь расстояние $\Delta x \approx 3 \cdot 10^8$ м/с$\cdot 2 \cdot 10^{-6}$ с $= 6 \cdot 10^2$ м и до уровня моря он бы не дошел. Но, согласно нашим результатам, $\Delta t = \Gamma \Delta\tau = \Gamma\tau_0$. Для космических μ-мезонов (согласно определениям их скорости) $\Gamma \approx 10$, поэтому $\Delta t \approx 10 \cdot 2 \cdot 10^{-6}$ с $\approx 2 \cdot 10^{-5}$ с — время жизни μ-мезона в системе, относительно которой он движется. Тогда $\Delta x = c \cdot 10\tau_0 \approx 6$ км, и μ-мезон может дойти до уровня моря

Это прямое подтверждение относительности промежутков времени при переходе от одной системы отсчета к другой.

§ 67. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА В КОМПЛЕКСНОЙ ЗАПИСИ

Квадрат интервала между двумя событиями в СТО имеет вид:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Удобно считать временную координату в СТО мнимой. Положим, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$, тогда квадрат интервала равен:

$$ds^2 = -(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2),$$

а преобразования Лоренца можно записать так:

$$\begin{aligned} x_1' &= \Gamma(x_1 + i\beta x_4), & x_1 &= \Gamma(x_1' - i\beta x_4'),\\ x_2' &= x_2, & x_2 &= x_2',\\ x_3' &= x_3, & x_3 &= x_3',\\ x_4' &= \Gamma(x_4 - i\beta x_1), & x_4 &= \Gamma(x_4' + i\beta x_1'). \end{aligned} \tag{67.1}$$

Эти формулы получаются непосредственно из соотношений (64.8):

$$x' \equiv x_1' = \Gamma\left[x - \frac{V}{ic}\,ict\right] = \Gamma(x_1 + i\beta x_4),$$

$$ict' = x_4' = \Gamma\left(ict - ic\frac{V}{c^2}\,x\right) = \Gamma(x_4 - i\beta x_1).$$

Введение мнимой единицы — вспомогательная операция. Никакого существенного значения в СТО мнимая единица не имеет. Однако ее использование существенно упрощает вычисления.

§ 68. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СКОРОСТЕЙ

При рассмотрении движения частицы ее нахождение в данной точке пространства в данный момент времени есть событие. Движение частицы — последовательное наступление событий.