космических мезонов обнаруживается и на уровне моря. Следовательно, 5—6 км μ-мезоны могут пройти без распада. Путь, проходимый мезоном от места его рождения, Δx равен $V \cdot \Delta t$ (Δt — время жизни мезона в системе K — Земля). Если Δt совпадало бы с τ_0, то даже при движении со скоростью света μ-мезон прошел бы всего лишь расстояние $\Delta x \approx 3 \cdot 10^8$ м/с $\cdot 2 \cdot 10^{-6}$ с $= 6 \cdot 10^2$ м и до уровня моря он бы не дошел. Но, согласно нашим результатам, $\Delta t = \Gamma \Delta \tau = \Gamma \tau_0$. Для космических μ-мезонов (согласно определениям их скорости) $\Gamma \approx 10$, поэтому $\Delta t \approx 10 \cdot 2 \cdot 10^{-6}$ с $\approx 2 \cdot 10^{-5}$ с — время жизни μ-мезона в системе, относительно которой он движется. Тогда $\Delta x = c \cdot 10\tau_0 \approx 6$ км, и μ-мезон может дойти до уровня моря

Это прямое подтверждение относительности промежутков времени при переходе от одной системы отсчета к другой.

§ 67. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА В КОМПЛЕКСНОЙ ЗАПИСИ

Квадрат интервала между двумя событиями в СТО имеет вид:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Удобно считать временную координату в СТО мнимой. Положим, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$, тогда квадрат интервала равен:

$$ds^2 = -(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2),$$

а преобразования Лоренца можно записать так:

$$\begin{aligned} x_1' &= \Gamma(x_1 + i\beta x_4), & x_1 &= \Gamma(x_1' - i\beta x_4'),\\ x_2' &= x_2, & x_2 &= x_2',\\ x_3' &= x_3, & x_3 &= x_3',\\ x_4' &= \Gamma(x_4 - i\beta x_1), & x_4 &= \Gamma(x_4' + i\beta x_1'). \end{aligned} \tag{67.1}$$

Эти формулы получаются непосредственно из соотношений (64.8):

$$x' \equiv x_1' = \Gamma\left[x - \frac{V}{ic}\,ict\right] = \Gamma(x_1 + i\beta x_4),$$

$$ict' = x_4' = \Gamma\left(ict - ic\frac{V}{c^2}\,x\right) = \Gamma(x_4 - i\beta x_1).$$

Введение мнимой единицы — вспомогательная операция. Никакого существенного значения в СТО мнимая единица не имеет. Однако ее использование существенно упрощает вычисления.

§ 68. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СКОРОСТЕЙ

При рассмотрении движения частицы ее нахождение в данной точке пространства в данный момент времени есть событие. Движение частицы — последовательное наступление событий.

Формулы преобразований Лоренца непосредственно относятся к событиям, связанным с частицей. В СТО скорость частицы определяется так же, как и в классической механике:

если $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то $$v_x = \frac{dx}{dt} \text{ и т. д.}$$	если $x' = x'(t')$, $y' = y'(t)$, $z' = z'(t)$, то $$v'_x = \frac{dx'}{dt'} \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим два события, разделенные бесконечно малым промежутком времени dt. Для этих событий

$$dx' = \Gamma(dx - V\,dt), \quad dt' = \Gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right).$$

Составив отношение

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - V\,dt}{dt - \frac{V}{c^2}dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}},$$

получим формулу

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}. \tag{68.1}$$

Используя соотношения $dy' = dy$, $dz' = dz$ и составляя отношения $\frac{dy'}{dt'}$ и $\frac{dz'}{dt'}$, получим остальные формулы для преобразования компонент скорости:

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, \qquad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}. \tag{68.2}$$

Формулы обратного перехода получают обычным методом:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}. \tag{68.3}$$

Сделаем несколько замечаний по поводу этих формул:

1. Формулы несимметричны относительно v_x, v_y, v_z. Это связано с тем, что относительная скорость систем отсчета направлена по оси X.

2. Если скорости v и V много меньше c, т. е. $\frac{v}{c} \ll 1$, $\beta = \frac{V}{c} \ll 1$, то получим классический закон сложения скоростей.

3. Следует обратить внимание на правило знаков, используемое в формулах (68.1)—(68.3): компоненты скорости v_x и v'_x совпадают по направлению с переносной скоростью V.

Полученные формулы дают другие результаты, чем преобразования Галилея.

Пусть в системе K' $(v'_x = v',\ v'_y = 0,\ v'_z = 0)$, тогда в системе K $v_y = 0$ и $v_z = 0$, т. е. частица движется по оси X, и

$$v_x = v = \frac{v' + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'}, \tag{68.4}$$

тогда как преобразования Галилея приводят к результату:

$$v = v' + V.$$

Допустим, что $v' = c$. Тогда согласно преобразованиям Галилея $v = c + V$, а по формуле (68.4)

$$v = \frac{c + V}{1 + \frac{V}{c}} = c.$$

Из формул преобразования скоростей СТО получаем, что скорость света одна и та же во всех ИСО, как это и должно быть согласно второму постулату СТО.

§ 69. КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕРВАЛОВ МЕЖДУ СОБЫТИЯМИ И ПРИНЦИП ПРИЧИННОСТИ

Используя введенные обозначения (66 2), запишем квадрат интервала между двумя событиями:

$$s_{12}^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2. \tag{69.1}$$

Введем особое обозначение для пространственного расстояния между точками, где наступили два рассматриваемых события:

$$l_{12}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2,$$

а также обозначим для симметрии $\Delta t = t_{12}$.

Основное свойство интервала—его инвариантность:

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12} - l'^2_{12}. \tag{69.2}$$

1. Пусть в системе K наступили два события I и II, причем для них известны t_{12} и l_{12}. Нельзя ли так подобрать систему K', чтобы в ней эти два события наступали бы в одной точке (одноместно), т. е. чтобы $l' = 0$? В этом случае

$$s_{12}^2 \equiv c^2 t^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12} > 0.$$

Условие $s_{12}^2 > 0$—условие существования системы отсчета, в которой два заданных события наступали бы в одной и той же точке. Интервалы, для которых выполнено это условие, называют *времениподобными*. Условие $s_{12}^2 > 0$ можно записать еще и так:

$$c^2 t_{12}^2 > l_{12}^2,\quad c t_{12} > l_{12}.$$

Пример. Частица движется в системе K вдоль оси X со скоростью v. Как найти систему, в которой события, происходя-