Пусть в системе K' ($v'_x = v'$, $v'_y = 0$, $v'_z = 0$), тогда в системе K $v_y = 0$ и $v_z = 0$, т. е. частица движется по оси X, и

$$v_x = v = \frac{v' + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'}, \qquad (68.4)$$

тогда как преобразования Галилея приводят к результату:

$$v = v' + V.$$

Допустим, что $v' = c$. Тогда согласно преобразованиям Галилея $v = c + V$, а по формуле (68.4)

$$v = \frac{c + V}{1 + \frac{V}{c}} = c.$$

Из формул преобразования скоростей СТО получаем, что скорость света одна и та же во всех ИСО, как это и должно быть согласно второму постулату СТО.

§ 69. КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕРВАЛОВ МЕЖДУ СОБЫТИЯМИ И ПРИНЦИП ПРИЧИННОСТИ

Используя введенные обозначения (66 2), запишем квадрат интервала между двумя событиями:

$$s_{12}^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2. \qquad (69.1)$$

Введем особое обозначение для пространственного расстояния между точками, где наступили два рассматриваемых события:

$$l_{12}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2,$$

а также обозначим для симметрии $\Delta t = t_{12}$.

Основное свойство интервала — его инвариантность:

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2. \qquad (69.2)$$

1. Пусть в системе K наступили два события I и II, причем для них известны t_{12} и l_{12}. Нельзя ли так подобрать систему K', чтобы в ней эти два события наступали бы в одной точке (одноместно), т. е. чтобы $l' = 0$? В этом случае

$$s_{12}^2 \equiv c^2 t^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0.$$

Условие $s_{12}^2 > 0$ — условие существования системы отсчета, в которой два заданных события наступали бы в одной и той же точке. Интервалы, для которых выполнено это условие, называют *временниподобными*. Условие $s_{12}^2 > 0$ можно записать еще и так:

$$c^2 t_{12}^2 > l_{12}^2, \quad c t_{12} > l_{12}.$$

Пример. Частица движется в системе K вдоль оси X со скоростью v. Как найти систему, в которой события, происходящие с частицей, наступают в одной и той же точке пространства. Для этого должно выполняться условие $\Delta x'=0$. Но

$$\Delta x' = \Gamma(\Delta x - V\,\Delta t) = \Gamma(v-V)\,\Delta t,$$

откуда ясно, что должно соблюдаться условие $V=v$, т. е. K' должна быть системой, сопутствующей частице. Результат заранее очевидный. Однако в случае времениподобного интервала наблюдается еще одна существенная деталь. Воспользуемся формулой

$$\Delta t' = \Gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\,\Delta x\right) = \Gamma\left(1 - \frac{V}{c}\frac{v}{c}\right)\Delta t. \qquad (69.3)$$

Напомним, что равенство $(\Delta x/\Delta t) = v$ справедливо только для событий рассматриваемого типа. Но из формулы (69.3) видно, что $\Delta t'$ и Δt одного знака $[(V/c) < 1,\ (v/c) < 1]$. Значит, если в системе отсчета K событие II наступало позже, чем событие I, то и во всех других системах отсчета порядок следования событий будет таким же. Последовательность событий во времени сохраняется во всех системах отсчета (при условии $s_{12}^2 > 0$). При этом условии два события могут находиться между собой в причинно-следственной связи. Рассмотрим для примера два события.

Событие I — посылка светового сигнала (причина). Когда он приходит в некоторую точку, происходит событие II — взрыв (следствие).

Если одно событие причина, а другое — следствие, то вначале наступает причина, потом следствие. В случае времениподобного интервала существует такая система отсчета K', в которой оба события одноместны, т. е. наступают в одной и той же точке. Ясно, если одно событие было причиной, а другое — следствием, то причина должна наступать раньше. В этом случае обернуть ход событий нельзя ни в какой системе отсчета. Именно этому требованию удовлетворяют времениподобные интервалы. Нетрудно вскрыть и физический смысл условия $s_{12}^2 > 0$.

Пусть в точке *1* наступает первое событие, второе событие наступает в точке *2*. Расстояние между точками l_{12}. Соблюдено условие $ct_{12} > l_{12}$. Если из точки *1* послать световой сигнал в момент наступления события I, он придет в точку *2* до наступления события II; c — предельная скорость передачи сигнала. В этих условиях можно передать сигнал из точки *1* в точку *2* до наступления второго события. Событие I может быть причиной события II.

В физике причинно-следственная связь обусловлена взаимодействием между телами. Предельная скорость передачи взаимодействия (сигнала) равна c. Возможность (или невозможность) причинно-следственных взаимоотношений как раз и определяется конечностью скорости передачи взаимодействия.

2. Пусть в системе K наступают два произвольных события, причем $\Delta t \neq 0$, $\Delta x \neq 0$. Нельзя ли найти такую систему отсчета

K', в которой оба события наступают одновременно: $\Delta t' = 0$? Согласно соотношению (66.3)

$$\Delta t' = \Gamma \left(\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x \right). \tag{69.4}$$

Из условия $\Delta t' = 0$ получим искомую скорость системы:

$$V = \frac{c\ \Delta t}{\Delta x} c. \tag{69.5}$$

Нужно убедиться, что $V < c$, потому что только в этом случае можно реализовать систему отсчета.

Если $\Delta t' = t'_{12} = 0$, то из формулы (69.2) вытекает:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = -l_{12}'^2 \leqslant 0.$$

В общем случае условие возможности выбора необходимой системы отсчета заключается в том, что квадрат интервала — величина отрицательная. Такой интервал называют *пространственноподобным*.

Рассмотрим два события, наступивших на оси X. Пространственноподобный интервал в этом случае имеет вид:

$$s_{12}^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0, \quad \frac{c\,\Delta t}{\Delta x} < 1, \tag{69.6}$$

поэтому скорость V, определяемую согласно формуле (69.5), можно выбрать так, что она будет меньше c. Следовательно, если интервал между событиями пространственноподобный, то можно подобрать такую систему отсчета, в которой оба события наступают одновременно.

Выпишем формулу для промежутка времени между рассматриваемыми событиями в системе K':

$$\Delta t' = \Gamma \left(\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x \right). \tag{69.7}$$

Мы видели, что существует такая скорость $V < c$, при которой $\Delta t = 0$. Выберем скорость V^* так, чтобы $V < V^* < c$; тогда очевидно, что круглая скобка в формуле (72.7) станет отрицательной независимо от знака Δt.

Если интервал между событиями пространственноподобный, то существуют ИСО, удовлетворяющие условию: при $\Delta t > 0$ в K $\Delta t' < 0$ в K' (для тех же самых событий). Значит, если два события связаны между собой пространственноподобным интервалом, то последовательность их наступления во времени может изменяться при переходе от одной ИСО к другой. В этом нет ничего противоестественного, ибо события, связанные пространственноподобным интервалом, не могут находиться в причинно-следственной связи. Действительно, $s_{12}^2 < 0$, поэтому $ct_{12}^2 < l_{12}$. Пусть в точке *1* наступило событие I, и в момент его наступления послан сигнал в точку *2*. Этот сигнал не успеет дойти в точку 2 до того, как наступит событие II. Следовательно, событие I не может служить причиной появления события II.

3. Допустим теперь, что в системе K наступили два события, для которых $t_{12} \neq 0$ и $l_{12} \neq 0$. Выясним, существует ли такая ИСО K', в которой эти события наступят одновременно и одноместно, т. е. можно ли добиться выполнения условий $t'_{12} = 0$ и $l'_{12} = 0$?

Из предыдущего следует, что это может быть лишь в том случае, если $s^2_{12} = 0$. Но это значит (исключая случай распространения светового сигнала $t_{12} = 0$ и $l_{12} = 0$), что если два события совпали в одной ИСО, то они совпадают и во всех остальных.

Упражнения

39. На сколько укорачивается диаметр Земли в направлении движения вокруг Солнца с точки зрения наблюдателя, неподвижного относительно Солнца? Радиус Земли $r = 6{,}4 \cdot 10^3$ км, орбитальная скорость Земли $v = 30$ км/с.

40. С точки зрения наблюдателя, находящегося в движущемся поезде, удары молнии в точках A (впереди поезда) и B (позади поезда) произошли одновременно. Какая молния ударила в Землю раньше с точки зрения наблюдателя на Земле?

Указание. С Землей свяжите условно неподвижную систему K, с поездом — систему K' (рис. 90). Обозначьте координаты обоих событий в обеих системах: в точке $A(x_1, t_1;\ x'_1, t'_1)$, в точке $B(x_2, t_2;\ x'_2, t'_2)$. Используйте затем формулы преобразования времени при условии $t'_2 = t'_1$.

41. Сопоставьте законы сложения скоростей классической и релятивистской механики на примере капли, падающей отвесно (в системе, связанной с Землей) и попадающей на окно трамвая, движущегося со скоростью V. Найдите угол отклонения α капли от вертикали при релятивистском и нерелятивистском рассмотрении (необходимые обозначения даны на рисунке 91).

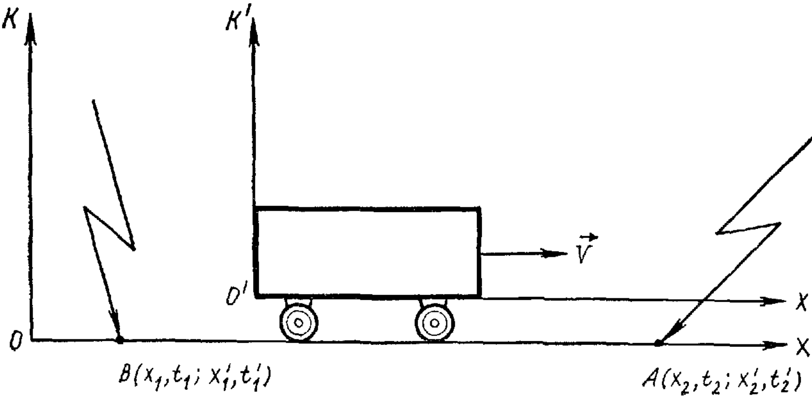

Рис 90

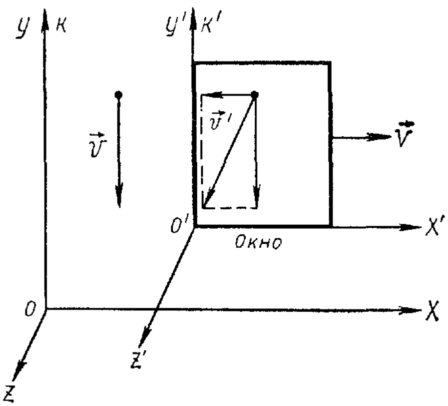

Рис. 91

Указание. Используйте формулы преобразования проекций скорости по Лоренцу (68.1)—(68.3) и по Галилею.

При анализе задачи выясните, можно ли воспользоваться различием в получаемых результатах для экспериментальной проверки СТО.

42. Две ракеты удаляются от Земли в прямо противоположные стороны со скоростью $0{,}8c$ относительно Земли. Найдите: а) с какой скоростью ракеты удаляются друг от друга с точки зрения земного наблюдателя; б) с какой скоростью движется одна ракета в системе отсчета, связанной с другой ракетой.

Указание. При решении второй задачи условно неподвижную систему K свяжите с «нашей» ракетой, штрихованную систему следует связать с Землей, которая удаляется от «нашей» ракеты со скоростью $V=0{,}8c$ (переносной скоростью). Другая ракета удаляется от Земли со скоростью $v'=0{,}8c$.

43. Проверьте, что интервал между событиями является инвариантом преобразований Лоренца.

Указание. Удобно выполнить проверку инвариантности для квадрата интервала $s_{12}^2=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2$. Из преобразований Лоренца вытекает:

$$y_2'-y_1'=y_2-y_1 \quad \text{и} \quad z_2'-z_1'=z_2-z_1.$$

В силу этого достаточно проверить, соблюдается ли равенство

$$c^2(t_2'-t_1')^2-(x_2'-x_1')^2=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2.$$

§ 70. Четырехмерная кинематика СТО

Релятивистская механика пользуется четырехмерным представлением СТО. Хотя законы релятивистской механики можно записать и в трехмерной форме (в пространственных координатах), правильная их интерпретация невозможна без знакомства с четырехмерным построением, включающим наряду с пространственными координатами четвертую координату—временну́ю.

Из формул преобразования Лоренца

$$x'(x,\,t)=\Gamma(x-Vt),\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'(x,\,t)=\Gamma\left(t-\frac{V}{c^2}x\right)$$

видно, что каждая из координат события в K' (x' и t') определяется через координаты этого же события x, t, измеренные в системе K. Это прямым образом указывает на то, что времен-