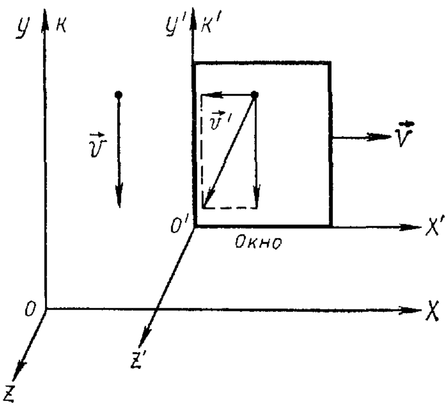

Рис. 91

Указание. Используйте формулы преобразования проекций скорости по Лоренцу (68.1)—(68.3) и по Галилею.

При анализе задачи выясните, можно ли воспользоваться различием в получаемых результатах для экспериментальной проверки СТО.

42. Две ракеты удаляются от Земли в прямо противоположные стороны со скоростью $0{,}8c$ относительно Земли. Найдите: а) с какой скоростью ракеты удаляются друг от друга с точки зрения земного наблюдателя; б) с какой скоростью движется одна ракета в системе отсчета, связанной с другой ракетой.

Указание. При решении второй задачи условно неподвижную систему K свяжите с «нашей» ракетой, штрихованную систему следует связать с Землей, которая удаляется от «нашей» ракеты со скоростью $V=0{,}8c$ (переносной скоростью). Другая ракета удаляется от Земли со скоростью $v'=0{,}8c$.

43. Проверьте, что интервал между событиями является инвариантом преобразований Лоренца.

Указание. Удобно выполнить проверку инвариантности для квадрата интервала $s_{12}^2=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2$. Из преобразований Лоренца вытекает:

$$y_2'-y_1'=y_2-y_1 \quad \text{и} \quad z_2'-z_1'=z_2-z_1.$$

В силу этого достаточно проверить, соблюдается ли равенство

$$c^2(t_2'-t_1')^2-(x_2'-x_1')^2=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2.$$

§ 70. Четырехмерная кинематика СТО

Релятивистская механика пользуется четырехмерным представлением СТО. Хотя законы релятивистской механики можно записать и в трехмерной форме (в пространственных координатах), правильная их интерпретация невозможна без знакомства с четырехмерным построением, включающим наряду с пространственными координатами четвертую координату—временную.

Из формул преобразования Лоренца

$$x'(x,\,t)=\Gamma(x-Vt),\ \ y'=y,\ \ z'=z,\ \ t'(x,\,t)=\Gamma\left(t-\frac{V}{c^2}x\right)$$

видно, что каждая из координат события в K' (x' и t') определяется через координаты этого же события x, t, измеренные в системе K. Это прямым образом указывает на то, что временные и пространственные координаты события не независимы, а связаны между собой. То же обстоятельство вытекает из инвариантности интервала

$$s_{12}^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = \mathrm{Inv}\ (\text{инвариант}).$$

Однако в этом выражении связываются уже пространственные и временные интервалы. Именно благодаря этому можно ввести четырехмерное пространство (пространство-время).

Чтобы в самых общих чертах пояснить, что значит «введение пространства», обратимся к трехмерному пространству.

Трехмерное пространство можно разметить с помощью декартовой системы координат. Тогда получим многообразие точек. Чтобы из многообразия точек «получилось» пространство, в котором можно было ввести и использовать геометрические величины, необходимо определить основную геометрическую величину — длину или же расстояние между точками.

Обычно для определения расстояния между двумя точками пользуются теоремой Пифагора и для бесконечно малого расстояния ds в евклидовом пространстве пишут:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{70.1}$$

Естественно, расстояние между точками не должно зависеть от выбора системы отсчета, и, следовательно, определение должно быть таким, чтобы оставаться инвариантным при преобразовании координат.

Теперь вернемся к СТО. У события — четыре координаты $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$ (в этой записи у всех координат одинаковая размерность), тесно связанные между собой. Рассмотрим многообразие точек, которое характеризуется координатами x, y, z, ict или x_1, x_2, x_3, x_4. Появление координат у точек этого многообразия означает введение четырех ортогональных осей (не следует пытаться воссоздать наглядный образ таких осей). Многообразие точек с координатами x, y, z, ict называют миром Минковского (по имени известного математика Германа Минковского, заложившего основу четырехмерной СТО).

Если из начала отсчета в какую-то четырехмерную точку, т. е. точку с четырьмя координатами, провести радиус-вектор, то можно считать, что координаты этой точки — компоненты четырехмерного радиус-вектора. Четырехмерные векторы будем обозначать буквами со стрелками, поставленными под буквами; четырехмерный радиус-вектор запишется так:

$$\underset{\rightarrow}{R}(x, y, z, ict) \equiv \underset{\rightarrow}{R}(\vec{r}, ict). \tag{70.2}$$

Рассмотрим, как перейти в этом случае от многообразия к пространству, т. е. как следует определить «расстояние между двумя точками» в этом четырехмерном пространстве.

В СТО рассматриваются только ИСО. При переходе от одной ИСО к другой имеется инвариант $ds^2=ds'^2=\text{Inv}$.

Поскольку из физических соображений следует, что при переходе от одной ИСО к другой должен сохраняться квадрат интервала, можно считать интервал между событиями «длиной» в пространстве событий. Итак, за расстояние в четырехмерном пространстве мы примем величину:

$$s_{12}=\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}. \quad (70.3)$$

Нетрудно видеть, что квадрат дифференциала четырехмерного радиус-вектора совпадает с квадратом интервала

$$ds^2=dR^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2. \quad (70.4)$$

В формуле (70.4) три знака «+» у квадратов дифференциалов и один — минус. В связи с этим четырехмерное пространство называется псевдоевклидовым (в евклидовом пространстве в квадратичной форме (70.1) все знаки у квадратов дифференциалов одинаковы).

Итак, каждому событию соответствует точка в четырехмерном пространстве, бесконечно малое расстояние в котором определяется формулой

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2. \quad (70.5)$$

Вернемся теперь к вопросу, что означают требования СТО для механики. Основой СТО является принцип относительности. Основной закон механики — второй закон Ньютона.

В классической механике выполняется принцип относительности Галилея, согласно которому II закон Ньютона сохраняет свой вид во всех ИСО. Однако при этом используются в качестве закона преобразования координат и времени преобразования Галилея. Мы уже убедились, что в общем случае правильные преобразования координат события — это преобразования Лоренца, но они должны изменить вид II закона Ньютона, иначе принцип относительности Эйнштейна оказывается уже несправедливым.

Итак, поскольку в сочетании с преобразованиями Лоренца уравнения Ньютона не обеспечивают выполнения принципа относительности Эйнштейна, уравнения механики должны быть видоизменены. Вместе с тем при переходе к нерелятивистским скоростям новые уравнения должны переходить в уравнения Ньютона. Вводимые новые четырехмерные величины в предельном случае $v \ll c$ переходят в величины классической механики.

Построение четырехмерных релятивистских уравнений движения опирается на особенности векторной записи. Как и в случае обычного трехмерного пространства, преимущество векторной записи состоит в том, что эта запись не зависит от координатной системы. При изменении координатной системы изменяются проекции векторов, т. е. запись уравнения в проекциях зависит от выбора системы координат (а векторная запись—нет).

Если бы удалось записать уравнения динамики в четырехмерной векторной форме, то первый постулат СТО был бы автоматически выполнен, поскольку такая запись сохраняет свой вид для любой инерциальной системы отсчета, т. е. при преобразованиях Лоренца. При трехмерной записи в законе динамики $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$ дифференцирование производится по времени. Но, дифференцируя вектор импульса по времени, получают снова вектор только потому, что в классической физике время считается инвариантом, т. е. одним и тем же для всех систем отсчета. В СТО время уже не инвариант, оно изменяется при переходе от одной ИСО к другой. Отношение четырехмерного вектора ко времени уже не является вектором. Таким образом, необходимо ввести величину, связанную с обычным временем, но обладающую свойством инварианта. Этим свойством обладает собственное время частицы. Получим еще раз связь собственного и координатного времени с помощью интервала между событиями.

Рассмотрим движение частицы. Квадрат интервала между двумя событиями, происходящими с частицей, запишется так:

$$ds^2=c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2=c^2\,dt'^2-dx'^2-dy'^2-dz'^2.$$

Пусть тело покоится в K': $dx'=dy'=dz'=0$, а $dt'=d\tau$, где $d\tau$—собственное время. Из соотношения

$$c^2\,d\tau^2=c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2=c^2\left(1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2\,dt^2}\right)dt^2=$$
$$=c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)dt^2$$

получаем:

$$d\tau=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt=\frac{dt}{\gamma}, \qquad (70.6)$$

где $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Формула (70.6) связывает собственное время с координатным. Собственное время—инвариант преобразований Лоренца.

Обращаем внимание на различие в записи (и смысле) радикалов $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}=\sqrt{1-\beta^2}=\frac{1}{\Gamma}$ и $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{\gamma}$. Они совпадают лишь в случае $V=v$ (когда система отсчета K' связана с движущейся частицей, т. е. когда $v'=0$).

В уравнения динамики должно входить собственное время. Собственное время можно интерпретировать как время, отсчитанное по часам, связанным с движущимся телом. Но это не обязательно. Если часы связаны с телом, которое движется с ускорением, то часы отсчитывают собственное время лишь до тех пор, пока на них не влияет ускорение. Но подсчитать собственное время можно всегда, зная промежуток координатного времени и скорость частицы, с помощью формулы (70.6).

Используя понятие инвариантного времени, можно перейти к построению основных четырехмерных величин, необходимых в механике. Проще всего идти методом аналогий с трехмерным пространством; обычно три первые компоненты четырехмерных величин имеют аналогии в обычном пространстве. Четвертая же компонента потребует особого рассмотрения.

Четырехмерная скорость. Скорость определяется производной

в 3-пространстве	в 4-пространстве (пространстве-времени)
$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\underset{\to}{V} = \frac{d\underset{\to}{R}}{d\tau}$. (70.7)

В научной и учебной литературе при четырехмерном представлении СТО широко применяются сокращенные обозначения: трехмерное пространство — 3-пространство, четырехмерный вектор скорости — 4-скорость (читается: четырех-скорость) и др. Эти обозначения используются и в этой книге. Будем считать, что индексы α, β, ... пробегают значения 1, 2, 3, а i, k, ... —значения 1, 2, 3, 4 Обозначим компоненты четырехмерной скорости через u_1, u_2, u_3, u_4. Для первых трех компонент согласно (70.6) имеем:

$$u_\alpha = \frac{dx_\alpha}{d\tau} = \frac{dx_\alpha}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dx_\alpha}{dt} = \gamma v_\alpha \ (\alpha = 1, 2, 3), \qquad (70.8)$$

где v_α—компоненты трехмерной скорости. Итак, три первые компоненты четырехмерной скорости—это компоненты трехмерной скорости, умноженные на множитель γ, зависящий от модуля скорости частицы. Четвертая компонента равна:

$$u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \gamma\frac{d(ict)}{dt} = ic\gamma. \qquad (70.9)$$

При $v \ll c$ множитель $\gamma \sim 1$, и тогда первые три компоненты четырехмерной скорости совпадают с обычной скоростью. Четвертая компонента скорости отлична от нуля даже тогда, когда частица покоится (при $v=0$ $\gamma=1$ и $u_4 = ic$). Последнее обстоятельство имеет ясный смысл. Время остановить нельзя, оно всегда течет. В четырехмерном мире «покоя» (в том смысле, что $\underset{\to}{V}=0$) быть не может.

Выпишем компоненты четырехмерной скорости в таком виде

$$\underset{\to}{V}\begin{pmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ \gamma v_x, & \gamma v_y, & \gamma v_z, & ic\gamma \end{pmatrix} = \underset{\to}{V}(\gamma\vec{v},\ ic\gamma). \qquad (70.10)$$

В частности, в той системе отсчета, где тело покоится ($v=0$),

$$\underset{\to}{V^0}\begin{Bmatrix} u_1^0, & u_2^0, & u_3^0, & u_4^0 \\ 0, & 0, & 0, & ic \end{Bmatrix}. \qquad (70.11)$$

Найдем квадрат модуля 4-вектора скорости, используя соотношение (70 10):

$$\underset{\to}{V^2}=u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=\gamma^2v^2-\gamma^2c^2=-c^2. \qquad (70\ 12)$$

Проще, пользуясь инвариантностью квадрата модуля четырехмерного вектора $\underset{\to}{V^2}=\underset{\to}{V^{0^2}}$, подсчитать эту величину в собственной системе отсчета с привлечением выражения (70.11).

В качестве примера использования 4-вектора скорости выведем еще раз формулы преобразования компонент трехмерной скорости при переходе от одной ИСО к другой. Для этого рассмотрим запись скорости в четырехмерном пространстве в виде четырехмерного вектора, которая сразу же раскрывает закон ее преобразования при переходе от одной инерциальной системы к другой. Этот закон был дан выше (67.1) для преобразования компонент четырехмерного радиус-вектора $\underset{\to}{R}$ (x_1, x_2, x_3, x_4).

Пусть в системе K заданы составляющие 4-скорости $\underset{\to}{V}$ (u_1, u_2, u_3, u_4). Согласно формулам (67.1) в системе K' получим:

$$u_1'=\Gamma(u_1+i\beta u_4),\quad u_2'=u_2,\quad u_3'=u_3,\quad u_4'=\Gamma(u_4-i\beta u_1). \qquad (70\ 13)$$

Составляющие четырехмерной скорости в системах K и K' согласно (70.10) будут:

$$\underset{\to}{V}(\gamma\vec{v},\ ic\gamma),\quad \underset{\to}{V'}(\gamma'\vec{v}',\ ic\gamma').$$

Подставляя их значения в выражение (70.13), получим:

$$\begin{gathered}\gamma'v_x'=\Gamma(\gamma v_x-\gamma V),\quad \gamma'v_y'=\gamma v_y,\quad \gamma'v_z'=\gamma v_z,\\ ic\gamma'=\Gamma(ic\gamma-i\beta\gamma v_x).\end{gathered} \qquad (70.14)$$

Из равенства (70.14) следует, что

$$\frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{V}{c^2}v_x\right)}.$$

Подставляя это выражение в три первых равенства (70.14), получим:

$$v_x'=\frac{1}{\gamma'}\Gamma(v_x-V),\quad v_y'=\frac{\gamma}{\gamma'}v_y,\quad v_z'=\frac{\gamma}{\gamma'}v_z,$$

т. е. формулы, непосредственно полученные из преобразований Лоренца.