§ 71. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

Перейдем теперь к построению основного уравнения динамики СТО. Воспользовавшись снова аналогией, введем четырехмерный вектор импульса частицы

трехмерный импульс (3-импульс)	четырехмерный импульс (4-импульс)	
$\vec{p} = m_0 \vec{v}$	$\underset{\to}{P} = m_0 \underset{\to}{V}$.	(71.1)

Чтобы получить четырехмерный вектор $\underset{\to}{P}$, нужно умножить четырехмерный вектор $\underset{\to}{V}$ на скаляр. Скаляр (инвариант) m_0 называют массой покоя частицы. Поскольку никаких других масс мы вводить не будем, то всюду ниже под массой понимается масса покоя *. Смысл последнего названия станет ясным несколько позже. Мы постараемся записать уравнение динамики в четырехмерной векторной форме, опять-таки исходя из аналогии:

основное трехмерное уравнение динамики	основное четырехмерное уравнение динамики	
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	$\frac{d\underset{\to}{P}}{d\tau} = \underset{\to}{F}$.	(71.2)

Мы уже объясняли, почему вместо dt нужно использовать инвариантное выражение $d\tau$. Определив четырехмерную скорость, мы определили тем самым левую часть выражения (71.2). Что такое четырехмерная сила, нам предстоит выяснить. Компоненты левой части выражения (71.2) легко записать:

$$\frac{dP_\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{dP_\alpha}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}(m_0 u_\alpha) = \gamma \frac{d}{dt}(m_0 \gamma v_\alpha) \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3).$$

Если ввести обозначение для компонент четырехмерной силы $\underset{\to}{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)$, то первые три компоненты (71.2) можно записать в виде

$$\gamma \frac{d}{dt}(m_0 \gamma v_\alpha) = \mathcal{F}_\alpha \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3).$$

Здесь мы сделаем существенное предположение, оправданием которого служит правильность полученных результатов. Будем считать, что первые три компоненты четырехмерной силы имеют вид

$$\mathcal{F}_\alpha = \gamma F_\alpha, \qquad (71.3)$$

---

* Индекс «0» у m_0 введен в связи с общепринятым обозначением массы покоя. Часто появляющееся ниже произведение $m_0\gamma$ в литературе обычно называют массой движения или релятивистской массой. Существенно, что $m_0\gamma$ не является инвариантом преобразований Лоренца.

где F_α — компоненты трехмерной силы. Тогда три первые компоненты четырехмерного уравнения движения примут вид

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma v_\alpha) = F_\alpha, \tag{71.4}$$

где v_α и F_α имеют смысл трехмерных компонент скорости и силы. Написав уравнения (71.4) последовательно для $\alpha = 1, 2, 3$ и умножив каждое из них соответственно на единичные векторы, направленные по осям X, Y, Z (т. е. на $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), и сложив полученные выражения, получим трехмерное релятивистское уравнение динамики (второй закон Ньютона в релятивистской форме)

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma\vec{v}) = \vec{F}. \tag{71.5}$$

Таким образом, три первых уравнения четырехмерного уравнения динамики — это релятивистское уравнение движения. Нам остается выяснить смысл четвертого уравнения

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 u_4) = \mathcal{F}_4; \quad \frac{d}{d\tau}(m_0 ic\gamma) = \mathcal{F}_4. \tag{71.6}$$

Правую часть этого уравнения (т. е. $\mathcal{F}_4$) можно вычислить следующим образом. Дифференцируя выражение (70.12) по τ, получим:

$$\gamma\vec{v}\,\frac{d}{d\tau}(\gamma\vec{v}) - c\gamma\,\frac{d}{d\tau}(c\gamma) = 0. \tag{71.7}$$

Заменяя в первом выражении $d\tau$ на $\frac{dt}{\gamma}$ и пользуясь (71 6), после умножения обеих частей на m_0 получим:

$$\gamma^2\vec{v}\vec{F} + ic\gamma\mathcal{F}_4 = 0,$$

т. е.

$$\mathcal{F}_4 = i\,\frac{\gamma}{c}\,(\vec{F}\vec{v}),$$

откуда окончательно

$$\frac{d}{dt}(m_0c^2\gamma) = \vec{F}\vec{v},$$

или

$$m_0\dot{\gamma} = \frac{1}{c^2}\,(\vec{F}\vec{v}). \tag{71.8}$$

Поскольку в формуле (71.8) стоит мощность силы, действующей на частицу, выражение в круглых скобках предыдущей формулы следует принять за энергию частицы

$$\mathscr{E} = m_0c^2\gamma. \tag{71.9}$$

Уместно сопоставить соответствующие величины ньютоновской и релятивистской трехмерной механики. Уравнение движения формально одинаково

$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$,	$\frac{d}{dt}(m_0\gamma\vec{v}) = \vec{F}$. (71.10)
Классический импульс	Релятивистский импульс
$\vec{p} = m\vec{v}$,	$\vec{p} = m_0\gamma\vec{v}$.
Энергия частицы (кинетическая)	Энергия частицы (полная)
$T = \frac{mv^2}{2}$,	$\mathscr{E} = m_0c^2\gamma$. (71.11)

Мы видим, что отличие соотношений релятивистской механики от классической состоит в определении импульса и в определении энергии. Прежде чем обсуждать особенности релятивистских уравнений движения, выпишем определения 4-вектора силы и 4-вектора импульса, который называют 4-вектором энергии-импульса, поскольку $m_0ic\gamma = i\frac{m_0c^2\gamma}{c} = i\frac{\mathscr{E}}{c}$:

$$\underset{\rightarrow}{P} = m_0\underset{\rightarrow}{V} = \left\{\begin{matrix} P_1, & P_2, & P_3, & P_4 \\ m_0\gamma v_x, & m_0\gamma v_y, & m_0\gamma v_z, & i\frac{\mathscr{E}}{c}\end{matrix}\right\} \equiv \underset{\rightarrow}{P}\left(\vec{p},\ i\frac{\mathscr{E}}{c}\right), \quad (71.12)$$

$$\underset{\rightarrow}{F} = \left\{\begin{matrix} \mathfrak{F}_1, & \mathfrak{F}_2, & \mathfrak{F}_3, & \mathfrak{F}_4 \\ \gamma F_x, & \gamma F_y, & \gamma F_z, & i\frac{\gamma}{c}(\vec{F}\vec{v})\end{matrix}\right\} \equiv \underset{\rightarrow}{F}\left(\gamma\vec{F},\ i\frac{\gamma}{c}(\vec{F}\vec{v})\right). \quad (71.13)$$

Преобразуем левую часть выражения (71.5) с учетом (71.8):

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma\vec{v}) = m_0\vec{v}\dot{\gamma} + m_0\gamma\dot{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{F}\vec{v}) + \dot{\vec{v}}m_0\gamma.$$

Поэтому можно написать:

$$m_0\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\gamma}\left[\vec{F} - \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{F}\vec{v})\right]. \quad (71.14)$$

Если в классической механике ускорение и сила совпадают по направлению, то в релятивистской механике они, вообще говоря, не совпадают. Исключение составляют два случая:

1) $\vec{F} \perp \vec{v}$, тогда $m_0\dot{\vec{v}} = \frac{\vec{F}}{\gamma}$. В этом случае, как видно из выражения (71.8), $\gamma = \mathrm{const}$.

Уравнение движения при $\vec{F} \perp \vec{v}$ имеет вид

$$m_0\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

В том случае, когда сила всегда перпендикулярна скорости, релятивистское уравнение движения совпадает с ньютоновским, но величина массы должна быть изменена ($m_0\gamma$). Это можно проверить экспериментально. При движении заряженной частицы в магнитном поле сила Лоренца $\vec{F}=e[\vec{v}\vec{B}]$; умножив обе части этого уравнения на $\vec{v}$, получим, что энергия частицы не меняется.

2) Пусть $\vec{F}\,\|\,\vec{v}$. Уравнение движения имеет вид

$$m_0\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\vec{F}=\frac{1}{\gamma^3}\vec{F}.$$

Для каждого данного момента времени

$$m_0\gamma^3=\frac{m_0}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3},$$

т. е. является переменной величиной.

Для двух рассмотренных случаев, когда ускорение и сила направлены одинаково, коэффициент пропорциональности между силой и ускорением разный. В промежуточном случае связь между ускорением и силой носит более сложный (тензорный) характер. Из уравнений Эйнштейна нельзя указать никакой однозначной зависимости массы от скорости, пригодной для всех случаев, поэтому разумно пользоваться инвариантной массой покоя m_0.

Напомним, что

$$\vec{p}=m_0\gamma\vec{v}=\frac{m_0c^2\gamma}{c^2}\vec{v}=\frac{\mathscr{E}}{c^2}\vec{v}. \qquad (71.15)$$

Откуда получим:

$$\frac{\mathscr{E}^2}{c^2}=m_0^2c^2\gamma^2, \qquad p^2=m_0^2\gamma^2v^2$$

и, наконец,

$$\frac{\mathscr{E}^2}{c^2}-p^2=m_0^2c^2. \qquad (71.16)$$

Энергия и импульс связаны так, что они определяют массу покоя.

Макроскопических тел, движущихся с релятивистской скоростью, в земных и околоземных условиях нет. В 1934 г. была открыта искусственная радиоактивность. Скорость электронов оказалась равной $0{,}9c$. С тех пор были открыты и исследованы многие элементарные частицы, движущиеся с релятивистскими скоростями. Массу покоя — этот характерный признак микрочастиц — удалось определить по виду треков элементарных частиц, например в камере Вильсона. Экспериментальные данные позволяют определить энергию и импульс частиц и вычислить их массу покоя. До сих пор мы получили ряд соотношений для частицы, лишенной внутреннего строения. Но эти же соотношения можно применить и к системе частиц.

Рассмотрим систему, состоящую из отдельных частиц. Масса покоя системы определяется формулой

$$M^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - P^2, \tag{71.17}$$

где E — полная энергия и P — суммарный импульс системы. Если частицы не взаимодействуют между собой, то $E = \Sigma\mathscr{E}_i$, $P = \Sigma p_i$ (всегда). Для взаимодействующих частиц $E = \Sigma\mathscr{E}_i + U$ (U — энергия взаимодействия частей системы, т. е. та энергия, которую необходимо затратить, чтобы разделить систему на невзаимодействующие части). Для того чтобы система была устойчива, энергия ее должна быть минимальна ($U < 0$, если система устойчива). В СТО точное выражение для потенциальной энергии записать не удается.

Рассмотрим систему невзаимодействующих частиц (идеальный газ). Выберем систему отсчета, где суммарный импульс частиц $\vec{P} = 0$. Тогда

$$M = \frac{E}{c^2}, \quad E = Mc^2.$$

Масса покоя системы есть энергия системы (в той ИСО, в которой суммарный импульс равен нулю), деленная на c^2. Эта формула — обобщение выражения для энергии одной частицы. Действительно, из $\mathscr{E} = m_0c^2\gamma$ при $v = 0$ получим:

$$\mathscr{E}_0 = m_0c^2.$$

Таким образом, масса покоя определяет энергию, содержащуюся в системе или частице (энергия покоя). Энергия покоя тела массой 1 г равна: $1\ \text{г}\cdot 9\cdot 10^{20}\ \text{см}^2/\text{с}^2 \approx 10^{14}$ Дж.

Для системы невзаимодействующих частиц $Mc^2 = \Sigma\mathscr{E}_i$, где $\mathscr{E}_i = m_{0,i}c^2\gamma_i$, имеем:

$$Mc^2 = \Sigma m_{0,i}c^2\gamma_i.$$

Введем понятие кинетической энергии в СТО — энергии, которой обладает движущаяся частица. Когда частица покоится, ее энергия $\mathscr{E}_0 = m_0c^2$, когда движется $\mathscr{E} = m_0c^2\gamma$. Отсюда

$$T = \mathscr{E} - \mathscr{E}_0 = m_0c^2(\gamma - 1). \tag{71.18}$$

Покажем, что классическая кинетическая энергия — предельный случай релятивистской:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots$$

$$T = m_0c^2(\gamma - 1) \approx \frac{m_0v^2}{2}$$

$\left(\text{с точностью до } \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^4}\right)$. Всегда можно написать

$$\mathscr{E} = T + m_0c^2;$$

Тогда для системы невзаимодействующих частиц

$$Mc^2 = \Sigma\mathscr{E}_i - \Sigma T_i + c^2\Sigma m_{0,i},$$

$$M = \frac{\Sigma T_i}{c^2} + \Sigma m_{0,i}.$$

Масса покоя в теории относительности не является аддитивной величиной. При образовании системы масса покоя не входит аддитивно в массу системы.

Рассмотрим устойчивую систему взаимодействующих частиц в системе отсчета, где $\vec{P} = 0$.

$$Mc^2 = E = \Sigma\mathscr{E}_i + U = c^2\Sigma m_{0,i} + \Sigma T_i + U \quad (U < 0).$$

Величину $\Delta M = \Sigma m_{0,i} - M$ называют дефектом масс. С помощью этого соотношения определяют энергию связи атомного ядра. Пусть N_p — число протонов в ядре, N_n — число нейтронов; тогда $N_p m_p + N_n m_n$ — сумма масс частиц, составляющих ядро. Масса ядра M может быть определена независимо. Дефект массы ядра $\Delta M = N_p m_p + N_n m_n - M$. Энергия связи может быть определена по формуле

$$U = \Delta Mc^2,$$

если $U \gg \Sigma T_i$.

§ 72. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ВЕКТОРОВ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА И СИЛЫ

Мы определили четырехмерные векторы энергии-импульса и силы:

$$\underset{\to}{P}\begin{pmatrix} P_1, & P_2, & P_3, & P_4 \\ p_x, & p_y, & p_z, & i\frac{\mathscr{E}}{c} \end{pmatrix} \equiv \underset{\to}{P}\left(\vec{p},\ i\frac{\mathscr{E}}{c}\right), \quad \vec{p} = m_0\gamma\vec{v},$$

$$\underset{\to}{F}\left(\gamma F_x,\ \gamma F_y,\ \gamma F_z,\ i\frac{\gamma}{c}(\vec{F}\vec{v})\right) = \underset{\to}{F}\left(\gamma\vec{F},\ i\frac{\gamma}{c}(\vec{F}\vec{v})\right).$$

Компоненты четырехмерных векторов находятся в определенной связи друг с другом. Составим, например, выражение

$$\underset{\to}{P}^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 = p^2 - \frac{\mathscr{E}^2}{c^2}, \quad \underset{\to}{P}^{0^2} = -\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2} = -m_0^2c^2.$$

Из этого выражения вытекает уже известная нам связь между энергией, импульсом и массой частицы:

$$\frac{\mathscr{E}^2}{c^2} - p^2 = m_0^2c^2.$$

Кстати, выразив энергию через импульс, мы получим релятивистскую функцию Гамильтона

$$\mathscr{E}(p) = \mathscr{H}(p) = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}.$$