Формулы преобразования компонент четырехмерных векторов ведут к интересным следствиям. Запишем формулы преобразования четырехмерного вектора энергии-импульса:

$$P_1' = \Gamma(P_1 + i\beta P_4);\quad P_2' = P_2;\quad P_3' = P_3;\quad P_4' = \Gamma(P_4 - i\beta P_1).$$

Пусть в системе K частица покоится (собственная система частицы). Тогда в этой системе $\vec{P}^0\left(0,\ 0,\ 0,\ i\frac{\mathcal{E}_0}{c}\right)$, а в системе K'

$$p_x' = \Gamma\left(i\beta \cdot i\frac{\mathcal{E}_0}{c}\right) = -\Gamma\frac{V}{c^2}\mathcal{E}_0;\quad p_y' = p_z' = 0;$$

$$i\frac{\mathcal{E}'}{c} = \Gamma\left(i\frac{\mathcal{E}_0}{c}\right);\quad \mathcal{E}' = \Gamma\mathcal{E}_0.$$

Естественно, что мы вернулись к уже известным формулам (71.15) и (71.10). Мы получили важный результат: в механике частицы всякая передача энергии связана с передачей импульса. Но этот же результат имеет место и в электродинамике (§ 40). Оказывается, он имеет универсальное значение, и именно поэтому утверждалось, что сигнал — это передача энергии и импульса из одной точки пространства в другую.

Полезно знать, как преобразуются силы при переходе от одной ИСО к другой. Пусть в системе K тело покоится и на него действует трехмерная сила $\vec{F}$. Тогда в этой системе 4-сила $\vec{F}^0$ имеет компоненты $\vec{F}^0(F_x^0,\ F_y^0,\ F_z^0,\ 0)$. Компоненты силы преобразуются по стандартным формулам:

$$\mathfrak{F}_1' = \Gamma(\mathfrak{F}_1 + i\beta\mathfrak{F}_4);\quad \mathfrak{F}_2' = \mathfrak{F}_2;\quad \mathfrak{F}_3' = \mathfrak{F}_3;\quad \mathfrak{F}_4' = \Gamma(\mathfrak{F}_4 - i\beta\mathfrak{F}_1),$$

откуда немедленно получим (четвертое соотношение не рассматриваем):

$$\gamma' F_x' = \Gamma F_x^0;\quad \gamma' F_y' = F_y^0;\quad \gamma' F_z' = F_z^0.$$

Но в рассматриваемом случае $\gamma' = \Gamma$, поэтому мы находим закон преобразования компонент трехмерной силы:

$$F_x' = F_x^0;\quad F_y' = F_y^0\sqrt{1-\beta^2};\quad F_z' = F_z^0\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (72.1)$$

Компоненты силы в направлении движения не изменяются. При нерелятивистских скоростях силы вообще не изменяются при переходе от одной ИСО к другой.

§ 73. СВЕТОВЫЕ КВАНТЫ (ФОТОНЫ) КАК РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЧАСТИЦЫ

Релятивистская механика строилась для частиц, обладающих конечной (отличной от нуля) массой покоя. Это видно, в частности, из того, что четырехмерный импульс частицы $\vec{P} = m_0\vec{V}$

имеет смысл лишь при условии $m_0 \neq 0$. Все частицы с массой $m_0 \neq 0$ не могут достичь скорости c в результате движения с ускорением. Для этого им нужно было бы сообщить бесконечную энергию и импульс ($\mathscr{E} = m_0 c^2 \gamma$, $\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}$, но при $\vec{v} \to c$ множитель $\gamma \to \infty$).

При взаимодействии электромагнитного поля с микрочастицей такая частица (например, электрон) получает от электромагнитного поля всегда определенную энергию и определенный импульс (речь идет для простоты о монохроматическом излучении, т. е. излучении с заданной частотой ω).

Впервые предложение о передаче электрону определенной энергии светом было высказано А. Эйнштейном в связи с теорией фотоэффекта (1905). Для объяснения рассеяния γ-кванта на электронах пришлось предположить, что электромагнитное поле передает электрону не только определенную энергию, но и определенный импульс.

Такая картина взаимодействия электромагнитного поля с электроном может быть наглядно описана как взаимодействие «частицы света» (фотона), обладающей определенной энергией и импульсом, с электроном. Конечно, было бы весьма наивно думать, что электромагнитное поле действительно состоит из частиц, напоминающих биллиардные шарики. Картина «частиц света» пригодна лишь для описания обмена энергией и импульсом между полем и микрочастицами.

Какие свойства мы должны приписать фотону, если хотим считать его релятивистской частицей? Одно из свойств фотона — связь между его энергией и импульсом — можно получить из макроскопической электродинамики. Действительно, для давления света P, падающего из вакуума на стенку, существует соотношение

$$P = \frac{\mathscr{E}}{c}, \tag{73.1}$$

где через $\mathscr{E}$ обозначена энергия, падающая в единицу времени нормально на единицу площади стенки, полностью поглощающей свет. Теперь представим себе, что на стенку падают фотоны (на самом деле, как это будет ясно из дальнейшего, существенно лишь то, что энергия и импульс на стенку передаются дискретными порциями). Пусть свет представляет собой плоскую волну, так что все фотоны движутся по одному направлению. По предположению каждый фотон несет с собой энергию ε и импульс $\vec{p}$. Если за единицу времени на единицу площади стенки попало N фотонов и все они были поглощены, стенка приобрела энергию $N\varepsilon$ и импульс $N\vec{p}$. Но импульс, приобретенный единицей площади стенки за единицу времени как раз и есть давление света P^*, так что $P=Np$, а $\mathscr{E}=N\varepsilon$. Поэтому из уравнения (73.1) вытекает связь между энергией и импульсом фотона

$$p=\frac{\mathscr{E}}{c}. \tag{73.2}$$

Для релятивистских частиц связь между энергией, импульсом и скоростью движения определяется соотношением $\vec{p}=\frac{\mathscr{E}}{c^2}\vec{v}$, откуда ясно, что для выполнения (73.2) необходимо, чтобы $v=c$. Итак, если интерпретировать фотон как релятивистскую частицу, то нужно считать, что он движется со скоростью света c.

Как и для всякой релятивистской частицы, для фотона в вакууме можно построить четырехмерный вектор энергии-импульса $\underset{\to}{P}\left(\vec{p},\ i\frac{\mathscr{E}}{c}\right)$. По общим формулам для вычисления квадрата четырехмерного вектора с учетом $v=c$ получим: $\underset{\to}{P}^2=0$. С другой стороны, для обычных частиц $\underset{\to}{P}^2=-m_0^2c^2$ [см. (70.12)]. Отсюда видно, что масса покоя фотона равна нулю. Следовательно, лишь те частицы могут двигаться с предельной релятивистской скоростью, у которых масса покоя равна нулю.

Из релятивистской механики получить выражения для энергии и импульса фотона нельзя. Но известно, что при испускании и поглощении, при взаимодействии с веществом свет ведет себя как набор частиц, каждая из которых обладает энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\omega/c$ (здесь $\hbar=1{,}05\cdot10^{-27}$ эрг·с — постоянная Планка, а ω — круговая частота света). В каждом элементарном акте взаимодействия с веществом участвует одна такая частица, названная в свое время Эйнштейном квантом света (фотоном); в каждом акте взаимодействия выполняются законы сохранения энергии и импульса. Поэтому за энергию кванта можно принять выражение $\hbar\omega$, а за импульс $\vec{p}=\frac{\hbar\omega}{c}\vec{s}$, где $\vec{s}$ — единичный вектор, направленный по лучу. Таким образом, если квант света (фотон) рассматривать как релятивистскую частицу, то ее четырехмерный вектор энергии-импульса определяется следующим образом:

$$\underset{\to}{P}\left(\hbar\vec{k},\ i\frac{\hbar\omega}{c}\right), \tag{73.3}$$

где $\vec{k}=k\vec{s}$, $k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{c}$ ($\vec{k}$ — волновой вектор, $\vec{s}$ — единичный вектор, направленные по лучу). Если сократить все компоненты $\underset{\to}{P}$ на общий множитель (постоянную Планка $\hbar$), приходим к четы-

---

* По закону Ньютона $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$. Разделив обе части на площадь, на которую действует сила, получим давление, т. е. $\vec{P}=\frac{\vec{F}}{S}=\frac{1}{S}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt}$; справа как раз стоит приращение импульса на единицу площади в единицу времени.

рехмерному волновому вектору кванта света (фотона)

$$\underset{\rightarrow}{k}(\vec{k}, ik); \quad k=\frac{\omega}{c}; \quad \underset{\rightarrow}{P}=\hbar \underset{\rightarrow}{k}. \qquad (73.4)$$

С введением четырехмерного волнового вектора можно легко получить формулы, описывающие эффект Доплера; он обнаруживается для волн любой природы и заключается в том, что при относительном движении источника и приемника (наблюдателя) частота звука или света, определяемая наблюдателем, отличается от частоты, измеренной в системе отсчета, где источник покоится.

Рассмотрим плоскую световую волну, наблюдаемую в системе отсчета K' и характеризуемую четырехмерным вектором $\underset{\rightarrow}{k}$. Выберем систему K' так, чтобы луч света распространялся в этой системе в плоскости $x'y'$ и составлял угол θ' с осью X'. Выпишем компоненты четырехмерного вектора $\underset{\rightarrow}{k}'$:

$$k_1'=k'\cos\theta'=\frac{\omega'}{c}\cos\theta', \quad k_2'=k'\sin\theta'=\frac{\omega'}{c}\sin\theta',$$
$$k_3'=0, \quad k_4'=i\frac{\omega'}{c}=ik'. \qquad (73.5)$$

Компоненты $\underset{\rightarrow}{k}$ в системе K находят по формулам

$$k_1=\Gamma(k_1'-i\beta k_4'), \quad k_2=k_2', \quad k_3=k_3', \quad k_4=\Gamma(k_4'+i\beta k_1'). \qquad (73.6)$$

Прежде всего обнаруживаем, что и в системе K луч не выходит из плоскости (XY), так как $k_3=0$. Из формул (73.6) находим для k_4:

$$i\frac{\omega}{c}=\Gamma\left(i\frac{\omega'}{c}+i\beta\frac{\omega'}{c}\cos\theta'\right),$$

или

$$\omega=\omega'\frac{1+\beta\cos\theta'}{\sqrt{1-\beta^2}}=\omega'\Gamma(1+\beta\cos\theta'). \qquad (73.7)$$

Следовательно, если в системе K' частота света была равна ω', то в системе K она уже будет согласно выражению (73.7) иной. Из первой формулы (73.6) вытекает, что

$$\frac{\omega}{c}\cos\theta=\Gamma\left(\frac{\omega'}{c}\cos\theta'-i\beta i\frac{\omega'}{c}\right),$$

или, если принять во внимание выражение (73.7),

$$\cos\theta=\frac{\omega'}{\omega}\Gamma(\cos\theta'+\beta)=\frac{\cos\theta'+\beta}{1+\beta\cos\theta'}. \qquad (73.8)$$

С учетом формулы (73.7) из второй формулы (73.5) получим:

$$\sin\theta=\frac{\omega'}{\omega}\sin\theta'=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta'}\sin\theta'=\frac{\sin\theta'}{\Gamma(1+\beta\cos\theta')}. \qquad (73.9)$$

Нетрудно с помощью уравнений (73.8) и (73.9) найти выражение для $\sin\theta'$ через угол θ:

$$\sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\Gamma(1-\beta\cos\theta)}. \qquad (73.10)$$

Полученные формулы позволяют дать количественное объяснение двум оптическим эффектам — эффекту Доплера и аберрации света.

Пусть источник покоится в системе K'. Тогда приборы, покоящиеся в этой системе, фиксируют собственную частоту источника света ω_0 ($\omega_0 = \omega'$). Найдем зависимость частоты ω в системе K от угла θ.

Из формулы (73.8) следует, что $\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1-\beta\cos\theta}$, откуда

$$1+\beta\cos\theta' = \frac{1-\beta^2}{1-\beta\cos\theta}$$

и, следовательно, выражение (73.7) можно окончательно записать так:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}. \qquad (73.11)$$

Эта формула описывает эффект Доплера. Наблюдатель в системе K зафиксирует частоту излучения ω, не совпадающую с собственной частотой источника ω_0. Наблюдаемая частота ω зависит не только от относительной скорости источника и наблюдателя $\left(\beta = \frac{V}{c}\right)$, но и от угла θ, под которым свет идет к наблюдателю относительно направления движения источника.

В частности, если излучение принимается в направлении относительной скорости, то мы имеем так называемый продольный эффект Доплера. Если система K' находится правее системы K, то источник удаляется от наблюдателя и свет движется в направлении, противоположном направлению оси (рис. 92). В этом случае $\cos\theta = \cos\pi = -1$, а для частоты ω и периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$ имеем:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad T = T_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Наблюдатель, принимающий свет от удаляющегося источника, обнаруживает уменьшение частоты.

Напротив, если система K' находится слева от K, то $\cos\theta = 1$ и источник приближается к наблюдателю:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \quad T = T_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

При сближении приемника и источника частота принимаемого света увеличивается по сравнению с собственной частотой. С точ-

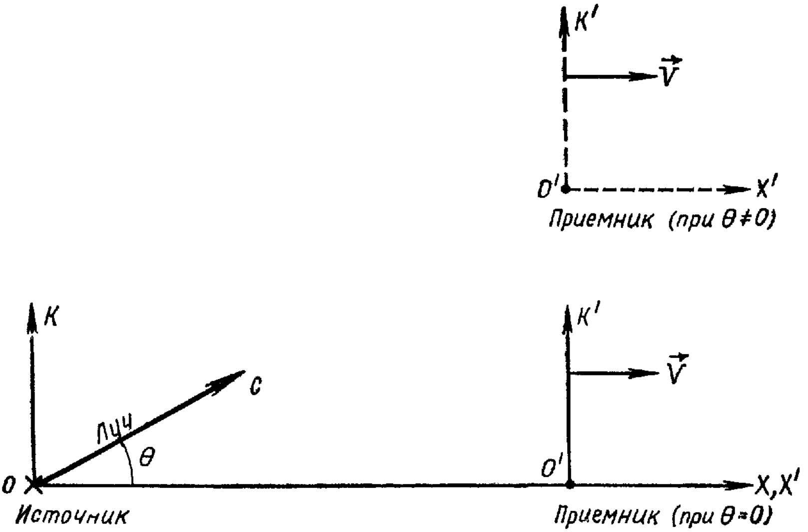

Рис. 92

ностью до членов β^2 две последние формулы можно переписать так:

$$T = T_0(1-\beta),$$
$$\omega = \omega_0(1+\beta)$$

(для получения этих формул проще всего умножить числитель и знаменатель дроби под корнем на числитель).

Если источник движется перпендикулярно лучу зрения ($\theta = \pi/2$), то наблюдается поперечный эффект Доплера, при котором изменение частоты описывается формулой

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\beta^2}, \tag{73.12}$$

т. е. ω зависит уже от β^2. Если скорость движения источника нерелятивистская, разложение бинома в уравнении (73.12) дает

$$\omega = \omega_0\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right).$$

Поперечный эффект является эффектом второго порядка, поэтому его наблюдать гораздо труднее, чем продольный. Неудивительно поэтому, что поперечный доплер-эффект был обнаружен лишь в 1938 г., причем релятивистская формула была полностью подтверждена. В классической теории никакого поперечного доплер-эффекта быть не должно. Поперечный доплер-эффект возникает исключительно из-за относительности промежутков времени между событиями.