§ 74. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ФОРМЕ

Электродинамика Максвелла удовлетворяет всем требованиям СТО: при преобразованиях Лоренца все уравнения Максвелла сохраняют свой вид. Из этого не следует, однако, что релятивистская формулировка электродинамики ничего не внесла в наше понимание электромагнитных явлений. Электродинамика в четырехмерной форме раскрыла все достоинства тензорного исчисления как математического аппарата теории относительности. Использование четырехмерного антисимметричного тензора позволяет придать уравнениям электродинамики такой вид, который сохраняется при преобразованиях Лоренца. Мы начнем с введения некоторых четырехмерных величин.

Мы видели (см. § 41 и 48), что в вакууме электродинамические потенциалы $\vec{A}$ и φ удовлетворяют уравнениям Даламбера:

$$\Box\vec{A} \equiv \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j}, \tag{74.1}$$

$$\Box\varphi = \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{74.2}$$

Из уравнений (74.1)—(74.2) видно, что компоненты векторного потенциала A_x, A_y, A_z и скалярный потенциал φ удовлетворяют одинаковым дифференциальным уравнениям (уравнениям Даламбера), которые отличаются лишь правой частью. Можно объединить три уравнения (74.1) и уравнение (74.2) в одно четырехмерное векторное уравнение, если ввести два четырехмерных вектора:

вектор четырехмерного потенциала

$$\underset{\to}{\Phi}\begin{pmatrix} A_x, & A_y, & A_z, & \frac{i}{c}\varphi \\ \Phi_1, & \Phi_2, & \Phi_3, & \Phi_4 \end{pmatrix}, \tag{74.3}$$

вектор четырехмерной плотности тока

$$\underset{\to}{s}\begin{pmatrix} j_x, & j_y, & j_z, & ic\rho \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \end{pmatrix}. \tag{74.4}$$

Вспомним определение четырехмерного радиус-вектора

$$\underset{\to}{R}\begin{pmatrix} x, & y, & z, & ict \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix}.$$

Компоненты четырехмерных векторов $\underset{\to}{\Phi}$, $\underset{\to}{s}$, $\underset{\to}{R}$ выписаны в двух строчках, и их сопоставление сразу позволяет найти нужное значение компоненты. Определив четырехмерный потенциал и четырехмерную плотность тока, можно уравнения (74.1) и (74.2) записать одной формулой

$$\Box\Phi_i = -\mu_0 s_i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{74.5}$$

То, что три уравнения (74.5) при $i=1$, 2, 3 совпадают с уравнением (74.1), очевидно. Уравнение (74.5) для $i=4$ дает

$$\Box \frac{i}{c}\varphi = -\mu_0 ic\rho,$$

но

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}, \tag{74.6}$$

и мы приходим к уравнению (74.2).

Рассмотрим теперь преобразования плотности тока. Для этого воспользуемся формулами

$$s_1=\Gamma(s_1'-i\beta s_4'),\ s_2=s_2',\ s_3=s_3',\ s_4=\Gamma(s_4'+i\beta s_1'). \tag{74.7}$$

Четырехмерный ток образован плотностью тока и плотностью заряда. То, что ток и плотность заряда объединились в один четырехмерный вектор, вполне естественно. Если говорить о системах отсчета, находящихся в относительном движении, то заряд может покоиться лишь в одной, «собственной» системе отсчета. Во всех других ИСО заряд движется, и с точки зрения этих систем представляет собой ток. Такой ток называют конвекционным. Таким образом, переход от покоящегося заряда (электростатики) к току — это переход от собственной системы отсчета к любой другой ИСО.

Ток течет в веществе и в том случае, когда $\rho=0$. Например, в металлах суммарная плотность заряда, складывающаяся из зарядов ионов и свободных электронов, равна нулю:

$$\rho=\rho_+ + \rho_- = 0.$$

Но ток, конечно, может идти, если имеется направленное движение электронов:

$$\vec{j}=\rho_+\vec{v}_+ + \rho_-\vec{v}_- = \rho_-\vec{v}_-,$$

потому что скорость направленного движения ионов равна нулю.

Пусть в системе K' задана плотность заряда ρ', а тока нет ($\vec{j}'=0$). Следовательно, в системе K' четырехмерная плотность тока имеет компоненты $\vec{s}'(0, 0, 0, ic\rho'=ic\rho_0)$, т. е. $s_1'=s_2'=s_3'=0$, $s_4'=ic\rho_0$. Тогда согласно выражениям (74.7) в системе K имеем:

$$s_1=\Gamma(-i\beta ic\rho_0)=\Gamma V\rho_0,\ s_2=s_3=0,\ s_4=\Gamma ic\rho_0. \tag{74.8}$$

В развернутой форме последнее уравнение запишется так:

$$s_4=ic\rho=\frac{ic\rho_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Таким образом, мы приходим к закону преобразования плотности заряда при переходе от «собственной» системы, где заряд покоится, к системе, относительно которой заряд движется со скоростью V:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{74.9}$$

Из первого уравнения (74.8) получаем:

$$s_1 = j_x = \frac{\rho_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \rho V. \tag{74.10}$$

Смысл равенства (74.10) очень прост. Скорость заряда, покоящегося в системе K', относительно системы K равна V, поэтому $s_1 = j_x$ представляет собой конвекционный ток. Что касается изменения плотности заряда (74.9), то оно связано с изменением объема. Так как объем $\mathcal{V}$ изменяется по закону

$$d\mathcal{V} = d\mathcal{V}_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}},$$

а речь идет об одном и том же физическом объеме, содержащем тот же заряд dq, то

$$\rho_0 = \frac{dq}{d\mathcal{V}_0}, \text{ а } \rho = \frac{dq}{d\mathcal{V}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \frac{dq}{d\mathcal{V}_0} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \rho_0 \Gamma.$$

Конечно, полный заряд в заданном объеме остается неизменным в любой системе отсчета:

$$\rho_0 d\mathcal{V}_0 = \rho d\mathcal{V}. \tag{74.11}$$

§ 75. ТЕНЗОР ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В электродинамике напряженность электрического поля $\vec{E}$ и магнитную индукцию $\vec{B}$ удобно находить через электродинамические потенциалы $\vec{A}$ и φ (см. § 41):

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{75.1}$$

Перепишем эти формулы, используя компоненты четырехмерного потенциала:

$$B_x \equiv B_1 = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}, \tag{75.2}$$

$$E_x \equiv E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{c}{i} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - ic \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} = ic \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \right). \tag{75.3}$$

Последние члены в равенствах (75.2)—(75.3) записаны на основании определения компонент четырехмерного потенциала.