покоится, к системе, относительно которой заряд движется со скоростью V:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (74.9)$$

Из первого уравнения (74.8) получаем:

$$s_1 = j_x = \frac{\rho_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \rho V. \qquad (74.10)$$

Смысл равенства (74.10) очень прост. Скорость заряда, покоящегося в системе K', относительно системы K равна V, поэтому $s_1 = j_x$ представляет собой конвекционный ток. Что касается изменения плотности заряда (74.9), то оно связано с изменением объема. Так как объем $\mathscr{V}$ изменяется по закону

$$d\mathscr{V} = d\mathscr{V}_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}},$$

а речь идет об одном и том же физическом объеме, содержащем тот же заряд dq, то

$$\rho_0 = \frac{dq}{d\mathscr{V}_0}, \text{ а } \rho = \frac{dq}{d\mathscr{V}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \frac{dq}{d\mathscr{V}_0} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \rho_0 \Gamma.$$

Конечно, полный заряд в заданном объеме остается неизменным в любой системе отсчета:

$$\rho_0 d\mathscr{V}_0 = \rho d\mathscr{V}. \qquad (74.11)$$

§ 75. ТЕНЗОР ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В электродинамике напряженность электрического поля $\vec{E}$ и магнитную индукцию $\vec{B}$ удобно находить через электродинамические потенциалы $\vec{A}$ и φ (см. § 41):

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \qquad (75.1)$$

Перепишем эти формулы, используя компоненты четырехмерного потенциала:

$$B_x \equiv B_1 = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}, \qquad (75.2)$$

$$E_x \equiv E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{c}{i} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - ic \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} = ic \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \right). \qquad (75.3)$$

Последние члены в равенствах (75.2)—(75.3) записаны на основании определения компонент четырехмерного потенциала, Аналогично, используя компоненты Φ, можно записать и остальные компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Получим формулы, аналогичные (75.2)—(75.3), из которых следует, что все компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ можно выразить через некоторые комбинации производных от компонент четырехмерного вектора $\vec{\Phi}$ по четырехмерным координатам. Эти комбинации образуют антисимметричный четырехмерный тензор второго ранга

$$F_{ik}=c\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_i}-\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_k}\right)\quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{75.4}$$

Появление тензора вполне естественно, так как производные от компонент вектора преобразуются по правилу преобразования тензоров. В том, что тензор (75.4) содержит только векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$, можно убедиться, придавая индексам i, k в этой формуле независимо значения от единицы до четырех. Мы получим 16 значений F_{ik} (четыре из которых равны нулю), выраженных через компоненты $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Запишем эти компоненты в виде матрицы

$$F_{i,k}=\begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{75.5}$$

Как обычно, в обозначении $F_{i,k}$ первый индекс i указывает строчку, а второй — столбец матрицы F_{ik}.

То, что электромагнитное поле в вакууме описывается антисимметричным тензором, обусловлено равенством числа независимых координат антисимметричного тензора (шести) числу компонент у двух трехмерных векторов.

Наш результат существенно отличается от трехмерной картины. Хотя векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ выражаются через компоненты четырехмерного потенциала, но сами по себе трехмерные векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ не дополняются до четырехмерных векторов. В четырехмерном пространстве единое электромагнитное поле определяется величиной более сложной математической природы, чем вектор. Этой величиной является 4-тензор, называемый тензором электромагнитного поля.

Появление одного четырехмерного тензора вместо двух трехмерных векторов, описывающих электромагнитное поле, имеет глубокий физический смысл. Электрическое и магнитное поля неразрывно связаны между собой, а «появление» или «исчезновение» одного из полей связано с выбором системы отсчета. Например, «чистое» электрическое поле, порождаемое зарядом, возникает в специальных условиях, когда заряд рассматривается в системе, где он покоится. Однако в любой другой инерциальной системе этот заряд уже движется и, следовательно, образует электрический ток, с которым связано магнитное поле. С другой стороны, если по проводнику идет ток и проводник в некоторой системе отсчета представляется нейтральным, то в других инерциальных системах отсчета он представляется заряженным и, следовательно, в этих системах с ним связано электрическое поле зарядов. Если, например, в данной области пространства наблюдатель системы K фиксирует наличие одного лишь электрического поля, то наблюдатель любой другой системы K' фиксирует там же кроме электрического поля и магнитное. Наоборот, если измерениями в системе K установлено наличие одного лишь магнитного поля в точке наблюдения A, тогда в любой другой системе K' устанавливается налнчие там же как магнитного, так и электрического поля.

Поскольку любая компонента тензора в новой системе отсчета есть линейная комбинация всех компонент тензора в старой системе отсчета, то при переходе от одной системы отсчета к другой электрическое поле может появиться за счет того, что в другой системе было только магнитное поле, и наоборот. В известном смысле электромагнитное поле является замкнутым: если измерениями в какой-то ИСО установлено, что в некоторой неподвижной (относительно этой ИСО) точке наблюдения A нет ни электрического, ни магнитного поля, то электромагнитного поля там нет ни в одной другой ИСО.

Как только установлено математическое выражение физической величины, правила ее преобразования от одной инерциальной системы к другой получаются автоматически. Компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ являются компонентами тензора (75.5).

Напомним правило преобразования компонент тензора при преобразовании координат по Лоренцу. Перепишем его в сокращенном виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \Gamma x_1' + 0x_2' + 0x_3' - i\beta\Gamma x_4', \\ x_2 &= 0x_1' + 1x_2' + 0x_3' + 0x_4', \\ x_3 &= 0x_1' + 0x_2' + 1x_3' + 0x_4', \\ x_4 &= i\beta\Gamma x_1' + 0x_2' + 0x_3' + \Gamma x_4'. \end{aligned} \tag{75.6}$$

Тем самым мы составили матрицу коэффициентов этого линейного преобразования — матрицу Лоренца

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -i\beta\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}. \tag{75.7}$$

Преобразование (75.6) можно переписать теперь в виде

$$x_i = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{ik} x'_k \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{75.8}$$

Нетрудно проверить, что формулы обратного перехода получатся в том случае, если поменять местами столбцы и строки:

$$x'_i = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{ki} x_k \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{75.9}$$

Компоненты четырехмерных векторов преобразуются как координаты, потому что координаты — это компоненты четырехмерного радиус-вектора

$$A_i = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{ik} A'_k; \quad A'_i = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{ki} A_k. \tag{75.10}$$

Выведем формулы преобразования для производных компонент вектора по координатам, входящим в (75.4). Для удобства выпишем необходимые соотношения

$$\Phi_i = \Sigma \alpha_{im} \Phi'_m; \quad x'_l = \Sigma \alpha_{kl} x_k,$$

откуда

$$\frac{\partial x'_l}{\partial x_k} = \alpha_{kl}.$$

Найдем теперь $(\partial \Phi_i / \partial x_k)$ в новых, штрихованных, координатах:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial x'_l} \frac{\partial x'_l}{\partial x} = \sum \frac{\partial}{\partial x'_l} \left(\sum \alpha_{im} \Phi'_m\right) \alpha_{kl} = \sum \sum \alpha_{im} \alpha_{kl} \frac{\partial \Phi'_m}{\partial x'_l}.$$

Здесь использовано правило дифференцирования сложной функции — нужно помнить о связи между штрихованными координатами — и постоянство коэффициентов α.

Чтобы получить производную от компоненты вектора по «новой» координате в некоторой системе, нужно взять линейную комбинацию производных в «старой» системе. Это и есть закон преобразования компонент тензора. При дифференцировании всякой скалярной функции получается вектор, имеющий свои законы преобразования. Если дифференцируется вектор, то получается тензор второго ранга.

Получим закон преобразования компонент электромагнитного поля. Для этого запишем формулу преобразования компонент тензора электромагнитного поля

$$F_{ik} = \sum_m \sum_l \alpha_{im} \alpha_{kl} F'_{ml}. \tag{75.11}$$

В сумму (78.11) входит шестнадцать членов, каждый из которых содержит произведение двух α_{ik} и одной из компонент F_{ik}.

Рекомендуем читателю, который впервые сталкивается с такими формулами, выписать все шестнадцать членов. Удобнее всего это сделать так. Сначала развернуть сумму, например, по m, придавая m значения 1, 2, 3, 4. Индекс l по-прежнему означает суммирование. Получим сумму из четырех членов, в которой уже индекса m не будет. Затем в каждом из этих четырех членов произведем суммирование по l. В итоге все шестнадцать членов будут выписаны. Затем в эти члены нужно подставлять α_{ik} из матрицы Лоренца и компоненты F_{ik} из матрицы (75.5). Вы сразу обнаружите, что большинство членов суммы (75.11) равно нулю, поэтому провести суммирование не очень сложно. Действительно, α_{1m} при m, изменяющемся от 1 до 4,— это элементы первой строки матрицы Лоренца (75.7), а α_{2l} при $l=1, 2, 3, 4$—это элементы второй строки матрицы Лоренца. Но в первой строке матрицы отличны от нуля только элементы α_{11} и α_{14}. Следовательно, нужно брать для m лишь значения 1 и 4. Во второй строке отличен от нуля только элемент $\alpha_{22}=1$. Следовательно, для l нужно взять только значение $l=1$ и вместо формулы (75.11) можно написать:

$$F_{12}=cB_z=\alpha_{22}\alpha_{1m}F'_{m2}=\alpha_{1m}F'_{m2}=\alpha_{11}F'_{12}+$$
$$+\alpha_{14}F'_{12}=\Gamma\left\{cB'_z-i\frac{V}{c}(iE'_y)\right\}=\frac{cB'_z+\frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Сопоставляя второе и последнее равенства в написанной цепочке равенств и сокращая на c, получим:

$$B_z=\frac{B'_z+\frac{V}{c^2}E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\Gamma\left(B'_z+\frac{V}{c^2}E'_y\right).$$

Аналогичным образом получаются формулы преобразования остальных компонент; запишем их:

$$\begin{aligned} &E_x=E'_x, \quad E_y=\Gamma(E'_y+VB'_z), \quad E_z=\Gamma(E'_z-VB'_y),\\ &B_x=B'_x, \quad B_y=\Gamma\left(B'_y-\frac{V}{c^2}E'_z\right), \quad B_z=\Gamma\left(B'_z+\frac{V}{c^2}E'_y\right). \end{aligned} \tag{75.12}$$

В основе теории относительности лежит принцип относительности Эйнштейна. Главное в этом принципе то, что законы физики инвариантны во всех ИСО. Компоненты же полей, как мы видим, изменяются. Однако существуют некоторые комбинации характеристик полей, которые не изменяются при переходе от одной ИСО к другой. Выпишем их (их инвариантность можно проверить непосредственным вычислением с помощью формул преобразования Лоренца):

$$E^2-c^2B^2=\mathrm{Inv}, \tag{75.13}$$

$$\vec{E}\vec{B}=\mathrm{Inv}. \tag{75.14}$$

Если в какой-либо системе $\vec{B}$ или $\vec{E}=0$, то второй инвариант обращается в нуль.

1) $\vec{E}\vec{B}=0$, если $\vec{E}\perp\vec{B}$.

2) Если $E^2-c^2B^2>0$, то за счет выбора ИСО можно получить $\vec{B}'=0$.

Если $E^2-c^2B^2<0$, то получить $\vec{B}'=0$ нельзя, но можно путем выбора соответствующей ИСО устранить электрическое поле ($\vec{E}'=0$).

В случае плоской электромагнитной волны оба инварианта обращаются в нуль.

Упражнения

44. В состав жесткой компоненты вторичных космических лучей входят π-мезоны (с массой $m_0=273$ электронных масс). Определите среднее время жизни t мезона в лабораторной системе отсчета и длину его пробега, если среднее время жизни в системе, относительно которой он покоится (т. е. собственное время), равно $\tau=10^{-8}$ с, а его полная энергия составляет $\mathscr{E}=5\cdot10^9$ эВ.

Указание. Используйте формулу (64 3), связывающую собственное τ и координатное время t: $t=\dfrac{\tau}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$, в которой значение корня определяется из формулы (71.11)

$$\mathscr{E}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

Из этой же формулы найдите скорость частицы в лабораторной системе ($V=v$) и пройденный ею путь.

45. Определите скорость электрона, которому в ускорителе сообщили полную энергию 1,02 МэВ.

Указание. Исходите из релятивистского выражения для кинетической энергии (71.18)

$$T=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2.$$

«Энергию покоя» легко вычислить (она равна $\mathscr{E}_0=m_0c^2=0{,}51$ МэВ), затем найдите скорость электрона $v(V)$.

46. Вычислите скорость электрона, ускоренного разностью потенциалов $U=10^5$ В: а) по формулам СТО, б) в нерелятивистском приближении.

Указание. а) Исходите из формулы (71.18)

$$T=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2=eU,$$

откуда

$$\frac{eU}{m_0c^2}+1=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Вычисления существенно упрощаются подстановкой $\frac{v}{c}=\sin\alpha$:

$$\frac{eU+m_0c^2}{m_0c^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Из таблиц найдите значения $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

б) В нерелятивистском приближении примените формулу

$$T=eU=\frac{mv^2}{2}.$$

47. Фотон с частотой ω поглощается покоящимся атомом массой m_0. Найдите скорость атома после поглощения фотона

Указание. Поскольку атом после поглощения фотона будет двигаться в направлении движения фотона, можно записать законы сохранения энергии и импульса в следующем виде:

$$m_0c^2+\hbar\omega=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{\hbar\omega}{c}=\frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

откуда

$$v=c\frac{\hbar\omega}{m_0c^2+\hbar\omega}.$$

Полагая, что энергия фотона много меньше энергии покоя атома m_0c^2, воспользуйтесь правилом приближенного вычисления $\frac{1}{1+\alpha}\approx 1-\alpha$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С момента появления специальной теории относительности (1905) прошло свыше семидесяти лет. Не исключено, что релятивистские представления о времени и пространстве и сама СТО могли появиться раньше, чем в 1905 г. Однако реальное значение такой теории было бы невелико. Конечно, ее появление позволило бы дать объяснение оптическим экспериментам, связанным с «движущейся средой» (аберрация, опыт Физо, эффект Доплера), завершило бы электродинамику движущихся сред, но самые важные следствия теории, касающиеся механики, все равно остались бы в тени.

Специальная теория относительности существенна там, где встречаются скорости, сравнимые со скоростью света, и энергии, сравнимые с энергией покоя частиц. Об отступлениях от ньютоновской механики стало известно лишь за несколько лет до работы Эйнштейна «Об электродинамике движущихся тел» (1905).