Пояснение некоторых математических преобразований

1. К § 43. Использованное здесь преобразование

$$\operatorname{div}\left(\vec{E}_0 e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\right)=-i\vec{k}\vec{E}$$

можно обосновать следующим образом. Запишем выражение, стоящее под знаком дивергенции, в виде произведения вектора $\vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ на скаляр $e^{i\omega t}$, который от координат не зависит и поэтому может быть вынесен за знак дивергенции:

$$\operatorname{div}\left(\vec{E}_0 e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\right)=e^{i\omega t}\operatorname{div}\left(\vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right).$$

Согласно правилам дифференцирования экспоненциальной функции по координатам имеем (учитывая $\vec{E}_0=\text{const}$):

$$\operatorname{div}\left(\vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right)=-i\vec{k}\vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}.$$

Таким образом,

$$e^{i\omega t}\operatorname{div}\left(\vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right)=-i\vec{k}\vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}e^{i\omega t}=-i\vec{k}\vec{E}. \qquad \text{(a)}$$

Аналогично можно обосновать другое равенство (§ 43):

$$\operatorname{rot}\left(\vec{H}_0 e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\right)=-i\,[\vec{k}\vec{H}].$$

Выносим множитель $e^{i\omega t}$ за знак ротора:

$$\operatorname{rot}\left(\vec{H}_0 e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\right)=e^{i\omega t}\operatorname{rot}\left(\vec{H}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right)$$

и выписываем определитель для ротора в правой части:

$$\operatorname{rot}\left(\vec{H}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ H_0 e^{-ik_x x} & H_0 e^{-ik_y y} & H_0 e^{ik_z z}\end{vmatrix}.$$

Внимание. Нельзя смешивать единичный вектор $\vec{k}$ с волновым вектором и мнимую единицу $i=\sqrt{-1}$ с единичным вектором $\vec{i}$.

Согласно правилу дифференцирования экспоненциальных функций заменяем в определителе оператор $\dfrac{\partial}{\partial x}$ множителем $-ik_x$ и т. д., а компоненты амплитуды напряженности записываем: $H_0 e^{-ik_x x}=H_{0x}$ и т. д. Тогда определитель для ротора приобретает вид

$$\operatorname{rot}\left(\vec{H}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -ik_x & -ik_y & -ik_z\\ H_{0x} & H_{0y} & H_{0z}\end{vmatrix}=$$

$$=-\vec{i}\,(ik_y H_{0z}-ik_z H_{0y})-\vec{j}\,(ik_z H_{0x}-ik_x H_{0z})-\vec{k}\,(ik_x H_{0y}-ik_y H_{0x}).$$

В последнем звене стоит векторное произведение $-i\left[\vec{k}\vec{H}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right]$. С учетом опущенного нами выше множителя $e^{i\omega t}$ имеем:

$$-i\left[\vec{k}\vec{H}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}} e^{i\omega t}\right]=-i\,[\vec{k}\vec{H}]. \qquad (б)$$

Во избежание недоразумений уточняем, что в искомые формулы (а) и (б) входит волновой вектор $\vec{k}$.

2. К § 50. В записях формул (50.2) встречаются преобразования вида

$$\operatorname{rot}\vec{a}\left(t-\frac{R}{v}\right)=\left[\operatorname{grad}\left(t-\frac{R}{v}\right)\dot{\vec{a}}\right]=-\frac{1}{v}\,[\vec{m}\dot{\vec{a}}],$$

причем нами проведена замена $\dot{\vec{a}}=\ddot{\vec{P}}$. Здесь использовано правило дифференцирования функции от функции

$$\frac{d}{dt}f\,[\varphi(t)]=\frac{df}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}.$$

Как известно, ротор вектора $\vec{a}$ записывается при помощи определителя

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}.$$

Если вектор $\vec{a}$ зависит от аргумента $\left(t-\frac{R}{v}\right)$, то скалярная часть компонент, образуемых по диагоналям, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}a_y=\frac{\partial}{\partial x}\left(t-\frac{R}{v}\right)\cdot\frac{\partial a_y}{\partial t} \quad \text{и т. д.}$$

В силу этого можно переписать определитель так:

$$\operatorname{rot}\vec{a}\left(t-\frac{R}{v}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(t-\dfrac{R}{v}\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(t-\dfrac{R}{v}\right) & \dfrac{\partial}{\partial z}\left(t-\dfrac{R}{v}\right)\\ \dot{a}_x & \dot{a}_y & \dot{a}_z\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \operatorname{grad}_x\left(t-\dfrac{R}{v}\right) & \operatorname{grad}_y\left(t-\dfrac{R}{v}\right) & \operatorname{grad}_z\left(t-\dfrac{R}{v}\right)\\ \dot{a}_x & \dot{a}_y & \dot{a}_z\end{vmatrix}=$$

$$=\left[\operatorname{grad}\left(t-\frac{R}{v}\right)\dot{\vec{a}}\right].$$

Проекции градиента имеют вид

$$\operatorname{grad}_x\left(t-\frac{R}{v}\right)=-\frac{1}{v}\cdot\frac{R_x}{R} \quad \text{и т. д.}$$

$\left(\text{поскольку } \operatorname{grad}_a R=\frac{\vec{R}}{R}\right)$*. Поэтому мы получаем для первого исходного

* Индекс «а» означает, что дифференцирование проводится по координатам точки наблюдения.

равенства

$$\operatorname{rot}\vec{a}\left(t-\frac{R}{v}\right)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{v}\frac{R_x}{R} & -\frac{1}{v}\frac{R_y}{R} & -\frac{1}{v}\frac{R_z}{R} \\ \dot{a}_x & \dot{a}_y & \dot{a}_z \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{v}\left\{\vec{i}\left(\frac{R_y}{R}\dot{a}_z-\frac{R_z}{R}\dot{a}_y\right)+\vec{j}\left(\frac{R_z}{R}\dot{a}_x-\frac{R_x}{R}\dot{a}_z\right)+\vec{k}\left(\frac{R_x}{R}\dot{a}_y-\frac{R_y}{R}\dot{a}_x\right)\right\}.$$

В фигурных скобках стоит векторное произведение единичного радиус-вектора $\vec{m}=\frac{\vec{R}}{R}$ на производную вектора $\vec{a}$ по времени; следовательно,

$$\operatorname{rot}\vec{a}\left(t-\frac{R}{v}\right)=-\frac{1}{v}[\vec{m}\dot{\vec{a}}].$$

Решения задач

1. а) $E_1=-\dfrac{2qlr_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(r_1^2-\frac{l^2}{4}\right)^2}$,

б) $E_2=\dfrac{ql}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(r_2^2+\frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$.

2. Результирующая напряженность поля зарядов дуги направлена по оси симметрии Ox, т. е. $E=E_x=\int\limits_l dE_x$. Необходимо перейти к переменной α:

$$dl=r\,d\alpha.$$

Ответ: $E=\dfrac{k\sin\alpha_0}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$.

3. В силу осевой симметрии результирующее поле направлено по z: $E=E_z$. Следует пользоваться цилиндрической системой координат и выбрать центр диска за начало координат.

Ответ: $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(\dfrac{z}{|z|}-\dfrac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$.

Скобки $|z|$ означают, что здесь z — расстояние между точкой наблюдения и центром диска и является существенно положительной величиной.

В точке $z=+0$ имеем: $E_{+0}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, в точке $z=-0$ имеем: $E_{-0}=-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$.

4. В силу сферической симметрии $E=E_z=\int\limits_V\dfrac{\rho(z-z_0)\,dV}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}$.

Выполняя замену переменных под знаком интеграла: $z=R$, $z_0=R_0\cos\theta$, $r=\sqrt{R^2+R_0^2-2RR_0\cos\theta}$, получим:

$$E=\int\limits_{R_0=0}^{a}\int\limits_{\theta=0}^{\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\rho(R-R_0\cos\theta)\,R_0^2\sin\theta\,dR_0\,d\theta\,d\varphi}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(R^2+R_0^2-2RR_0\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Интегрирование по φ выполняется сразу; для интегрирования по θ следует подынтегральное выражение представить как разность. После подстановки