равенства

$$\operatorname{rot}\vec{a}\left(t-\frac{R}{v}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\frac{1}{v}\frac{R_x}{R} & -\frac{1}{v}\frac{R_y}{R} & -\frac{1}{v}\frac{R_z}{R}\\ \dot{a}_x & \dot{a}_y & \dot{a}_z\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{v}\left\{\vec{i}\left(\frac{R_y}{R}\dot{a}_z-\frac{R_z}{R}\dot{a}_y\right)+\vec{j}\left(\frac{R_z}{R}\dot{a}_x-\frac{R_x}{R}\dot{a}_z\right)+\vec{k}\left(\frac{R_x}{R}\dot{a}_y-\frac{R_y}{R}\dot{a}_x\right)\right\}.$$

В фигурных скобках стоит векторное произведение единичного радиус-вектора $\vec{m}=\frac{\vec{R}}{R}$ на производную вектора $\vec{a}$ по времени; следовательно,

$$\operatorname{rot}\vec{a}\left(t-\frac{R}{v}\right)=-\frac{1}{v}[\vec{m}\dot{\vec{a}}].$$

Решения задач

1. а) $E_1=-\dfrac{2qlr_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(r_1^2-\dfrac{l^2}{4}\right)^2}$,

б) $E_2=\dfrac{ql}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(r_2^2+\dfrac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$.

2. Результирующая напряженность поля зарядов дуги направлена по оси симметрии Ox, т. е. $E=E_x=\int\limits_l dE_x$. Необходимо перейти к переменной α:

$$dl=r\,d\alpha.$$

Ответ: $E=\dfrac{k\sin\alpha_0}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$.

3. В силу осевой симметрии результирующее поле направлено по z: $E=E_z$. Следует пользоваться цилиндрической системой координат и выбрать центр диска за начало координат.

Ответ: $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(\dfrac{z}{|z|}-\dfrac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$.

Скобки $|z|$ означают, что здесь z — расстояние между точкой наблюдения и центром диска и является существенно положительной величиной.

В точке $z=+0$ имеем: $E_{+0}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, в точке $z=-0$ имеем: $E_{-0}=-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$.

4. В силу сферической симметрии $E=E_z=\int\limits_V\dfrac{\rho(z-z_0)\,dV}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}$.

Выполняя замену переменных под знаком интеграла: $z=R$, $z_0=R_0\cos\theta$, $r=\sqrt{R^2+R_0^2-2RR_0\cos\theta}$, получим:

$$E=\int\limits_{R_0=0}^{a}\int\limits_{\theta=0}^{\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\rho(R-R_0\cos\theta)\,R_0^2\sin\theta\,dR_0\,d\theta\,d\varphi}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(R^2+R_0^2-2RR_0\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Интегрирование по φ выполняется сразу; для интегрирования по θ следует подынтегральное выражение представить как разность. После подстановки пределов получаем:

$$E=\frac{2\pi\rho}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\limits_{R_0=0}^{a}\frac{R_0}{R^2}2R_0dR_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{4\pi\rho a^3}{3R^2}.$$

5. В силу сферической симметрии поля поток через вспомогательную сферическую поверхность радиуса r_e (индекс «e» от exterieur — внешний) выражается формулой

$$N=E_eS=E_e\cdot 4\pi r_e^2.$$

Этот же поток по теореме Остроградского — Гаусса записывается так: $N=\frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}=\frac{\sigma\cdot 4\pi a^2}{\varepsilon\varepsilon_0}$. Приравниваем оба выражения для потока:

$$E_e\cdot 4\pi r_e^2=\frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}=\frac{\sigma\ 4\pi a^2}{\varepsilon\varepsilon_0};$$

$$E_e=\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_e^2}=\frac{\sigma a^2}{\varepsilon\varepsilon_0 r_e^2}.$$

Вспомогательную сферу радиусом r_i (индекс «i» от interieur — внутренний) поток вектора $\vec{E}$ не пронизывает, поскольку внутри этой сферы нет зарядов: $E_i=0$.

6. В силу осевой симметрии поля поток через оба основания вспомогательного цилиндра равен нулю. Для потока через боковую поверхность имеем: $N=ES_{бок}=E\cdot 2\pi r l$. По теореме Остроградского — Гаусса

$$N=\frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}=\frac{2\pi a l\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Отсюда $E=\frac{a\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0 r}$. Заряд пояса единичной длины $k=2\pi a\sigma$. Преобразуем предыдущую формулу к виду

$$E=\frac{2\pi a\sigma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}=\frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

Так выражается и поле однородной заряженной линии, если k — линейная плотность зарядов.

7. По обе стороны от заряженной плоскости S имеется однородное поле, для которого S — плоскость зеркальной симметрии. Поток через прямой цилиндр произвольной высоты, построенный на площадке ΔS и создаваемый зарядами $\sigma\Delta S$, пронизывает только оба основания. Поток через одно основание:

$$N=\frac{Q}{2\varepsilon\varepsilon_0}=\frac{\sigma\Delta S}{2\varepsilon\varepsilon_0}=E\Delta S;$$

отсюда $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$.

8. Фиксируем на пластинах две равные единичные площадки, расположенные друг против друга. Во внешнем пространстве потоки полностью компенсируют друг друга. В пространстве между пластинками потоки (а следовательно, и напряженности) складываются; согласно результатам упражнения 7 имеем: $E=\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$,

9. Поле обладает симметрией относительно плоскости, делящей пластинку пополам. Силовые линии нормальны к пластинке, поэтому целесообразно пользоваться декартовыми координатами, выбрав в качестве начала координат точку, лежащую на плоскости симметрии. Имеем: $E=E_x$.

Для наружной точки A_e теорема Остроградского — Гаусса записывается в виде: $\operatorname{div}\vec{E}_e=\frac{dE_e}{dx}=0$ (переходим к полной производной, поскольку E зависит только от x). Отсюда $E_e=C_1$.

Для точки A_i внутри пластинки: $\operatorname{div}\vec{E}_i=\frac{dE_i}{dx}=\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$.

Интегрирование дает: $E_i=\frac{\rho x}{\varepsilon\varepsilon_0}+C_2$.

Если перемещать точку A_i внутри пластинки в сторону уменьшения x, то значение E_i непрерывно уменьшается и при отрицательных значениях x становится отрицательным. В силу непрерывности напряженности при $x=0$ имеем $E_{i,0}=0$, т. е. $E_{i,0}=\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}\cdot 0+C_2=0$, и $C_2=0$.

Используем условие непрерывности на границе пластинки, где $x=\frac{h}{2}$. Подходя к границе извне, получаем $E_{e,\text{гран}}=C_1$, подходя к границе изнутри, имеем:

$$E_{i,\text{гран}}=\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{h}{2}.$$

Поскольку $E_{e,\text{гран}}=E_{i,\text{гран}}$ (непрерывность!): $C_1=\frac{\rho h}{2\varepsilon\varepsilon_0}$. Окончательно:

$$E_e=\frac{\rho h}{2\varepsilon\varepsilon_0}, \quad E_i=\frac{\rho x}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Обратите внимание на то обстоятельство, что в данной задаче поле в бесконечности не равно нулю. Этот результат является следствием условия (конечно, нереального), что заряды занимают бесконечный объем. Поле конечной пластинки в бесконечности $E=0$.

10. Налицо сферическая симметрия, поле имеет радиальное направление, следует пользоваться сферическими координатами: $E=E_r$.

Для наружной точки имеем:

$$\operatorname{div}\vec{E}_e=\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2E_e)}{dr}=0,$$

откуда $\frac{d}{dr}(r^2E_e)=0$, т. е. $r^2E_e=C_1$, и, наконец, $E_e=\frac{C_1}{r^2}$. Для точки A_i внутри слоя имеем:

$$\operatorname{div}\vec{E}_i=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2E_i)=\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

откуда

$$\frac{d}{dr}(r^2E_i)=\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho r^2,$$

$$r^2E_i=\frac{1}{3\varepsilon\varepsilon_0}\rho r^3+C_2,$$

$$E_i=\frac{1}{3\varepsilon\varepsilon_0}\rho r+\frac{C_2}{r^2}.$$

Для точки A_0 в полости (аналогично внешнему полю): $E_0=\frac{C_3}{r^2}$.

При определении постоянных C_1, C_2, C_3 исходим из свойств напряженности при объемном распределении зарядов: ее конечности и непрерывности.

Пусть $r\longrightarrow 0$ (центр сферы). Тогда при всяком $C_3\neq 0$ E_0 стремится к бесконечности. Чтобы удовлетворить условию конечности напряженности, надо принять $C_3=0$. Отсюда имеем $E_0=0$.

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из условия непрерывности на внутренней границе слоя ($r=b$) и на его внешней границе ($r=a$), как это уже было показано в упражнении 9.

Таким образом находим: $C_2=-\frac{1}{3\varepsilon\varepsilon_0}\rho b^3$, $C_1=\frac{\rho}{3\varepsilon\varepsilon_0}(a^3-b^3)$, откуда

$$E_i=\frac{\rho}{3\varepsilon\varepsilon_0 r^2}(r^3-b^3),$$

$$E_e=\frac{\rho}{3\varepsilon\varepsilon_0 r^2}(a^3-b^3).$$

Обозначая заряд слоя $Q=\frac{4\pi\rho}{3}(a^3-b^3)$, получаем:

$$E_e=\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

11. Для индукции поля в наружной точке A_e имеем:

$$\operatorname{div}\vec{D}_e=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 D_e)=0,$$

$$D_e=\frac{C_1}{r^2}.$$

В точке A_i внутри шара:

$$\operatorname{div}\vec{D}_i=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 D_i)=\rho,$$

$$D_i=\frac{\rho r}{3}+\frac{C_2}{r^2}.$$

Из условия конечности D_i при $r\to 0$ получаем: $C_2=0$, откуда

$$D_i=\frac{\rho r}{3}.$$

Используя условие непрерывности на границе ($r=a$), имеем: $\frac{\rho a}{3}=\frac{C_1}{a^2}$; $C_1=\frac{\rho a^3}{3}$; $D_e=\frac{\rho a^3}{3r^2}$. Определив D, находим значение напряженности из соотношений

$$E_i=\frac{D_i}{\varepsilon_1\varepsilon_0} \text{ и } E_e=\frac{D_e}{\varepsilon_2\varepsilon_0};\quad E_i=\frac{\rho r}{3\varepsilon_1\varepsilon_0},\quad E_e=\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_2\varepsilon_0 r^2}.$$

12. Ввиду осевой симметрии поля пользуемся цилиндрическими координатами. Поскольку $D=D_r$, имеем:

$$\operatorname{div}\vec{D}_e=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rD_e)=0,$$

$$\operatorname{div}\vec{D}_i=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rD_i)=\rho.$$

Дальнейший ход решения повторяет решение упражнения 11. Окончательно:

$$D_e=\frac{\rho a^2}{2r};\ D_i=\frac{\rho r}{2};$$

$$E_e=\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_2\varepsilon_0 r};\ E_i=\frac{\rho r}{2\varepsilon_1\varepsilon_0}.$$

13. В наружной точке поле шара (как при $\rho=\text{const}$, так и при $\sigma=\text{const}$) выражается так же, как и напряженность поля точечного заряда такой же величины, помещенного в центре шара: $E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$.

Аналогичный вывод справедлив и для потенциала. Имеем:

$$E=E_r=-\frac{d\varphi}{dr};\ d\varphi=-E\,dr=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\,dr.$$

Интегрируем от r до ∞ (где $\varphi_\infty=0$):

$$\int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_\infty} d\varphi=-\int\limits_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\,dr=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r};$$

$$\varphi_\infty-\varphi_A=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r},$$

т. е.

$$\varphi_A=\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

14. В силу осевой симметрии $E=E_r=-\frac{d\varphi}{dr}$; $d\varphi=-E\,dr=-\frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\,dr$.

Ввиду бесконечного объема цилиндра потенциал в бесконечности не равен нулю. Примем поэтому какую-либо эквипотенциальную поверхность за начальный уровень отсчета, например поверхность цилиндра. Интегрируем последнее выражение на отрезке от a до r: $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi=-\frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\limits_a^r\frac{dr}{r}$.

Имеем:

$$\varphi_2-\varphi_1=-\frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln r\Big|_a^r=-\frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}(\ln r-\ln a);$$

$$\varphi_2=\varphi_1+\frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln a-\frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln r.$$

Первые два слагаемых представляют собой постоянную величину; если взять разность потенциалов двух точек поля, то она, конечно, выпадает. В силу этого ее просто опускают и приходят к так называемому логарифмическому потенциалу:

$$\varphi=-\frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln r=\frac{k}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{1}{r}.$$

15. Надо воспользоваться выражениями $\text{rot}_r\vec{E}$, $\text{rot}_\theta\vec{E}$ и $\text{rot}_\varphi\vec{E}$. При подстановке условий задачи получаем, что все составляющие ротора равны нулю, т. е. $\text{rot}\,\vec{E}=0$. Следовательно, поле потенциально.

16. Отмечаем, что потенциал зависит только от r, откуда значение лапласиана потенциала:

$$\Delta\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

В наружной точке A_e:

$$\Delta\varphi_e = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_e}{dr}\right) = 0,$$

отсюда

$$r^2\frac{d\varphi_e}{dr} = -C_1;\ \frac{d\varphi_e}{dr} = -\frac{C_1}{r^2} = -E_e;$$

$$\varphi_e = \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Аналогично находим E_i и φ_i внутри шара. Определение постоянных интегрирования проводится на основе свойств потенциала и напряженности при объемном распределении зарядов (конечность, непрерывность, равенство нулю в бесконечности):

$$\varphi_e = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r},\quad \varphi_i = \frac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right).$$

17. При поверхностном распределении заряда потенциал всех точек поверхности одинаков и равен: $\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$. Следовательно,

$$W_1 = \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi\, dS = \frac{1}{2}\varphi Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

В случае объемного распределения заряда при $r < a$ (ср. упр. 16) потенциал $\varphi = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right)$. Следовательно,

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dV = \frac{1}{2}\int_V \frac{\rho^2}{2\varepsilon_0}\left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right) dV.$$

Выразив элемент объема в сферических координатах, в результате интегрирования по объему шара получаем:

$$W_2 = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a},$$

таким образом, $W_2 > W_1$.

18. Исходим из выражения для энергии диполя во внешнем поле:

$$W = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\vec{l}\vec{E},$$

отсюда

$$W = -q\vec{l}\vec{E} = -\vec{p}\vec{E}.$$

19. Исходим из формулы (20.9) $Q_q = -\frac{\partial W_e}{\partial q}$. При вращательном движении роль обобщенной силы играет вращающий момент $\vec{K}$, обобщенной координатой является угол поворота θ, т. е. $K = -\frac{\partial W}{\partial\theta}$. С учетом результата упражнения 18 имеем:

$$K = -\frac{\partial W}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(pE\cos\theta) = -pE\sin\theta,$$

Отрицательный знак означает, что вращающий момент стремится уменьшить угол θ между $\vec{p}$ и $\vec{E}$. Следовательно, $\vec{K} = [\vec{p}\vec{E}]$.

20. Выделим в проводящей среде между обкладками сферический слой элементарной толщины dr; его сопротивление

$$dR=\rho\frac{dr}{S}=\frac{dr}{4\pi r^2\gamma}.$$

Полное сопротивление

$$R=\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{4\pi r^2\gamma}=\frac{1}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

Ток через конденсатор

$$I=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{R}=\frac{4\pi\gamma r_1 r_2(\varphi_1-\varphi_2)}{r_2-r_1}.$$

21. Ответ можно непосредственно получить из упражнения 20, полагая вторую обкладку конденсатора удаленной в бесконечность: $r_2=\infty$. Тогда $R=\frac{1}{4\pi\gamma r}$. В случае полусферического заземления, зарытого вровень с поверхностью почвы (см. рис. 44), сопротивление заземления в два раза больше, т. е. $R=\frac{1}{2\pi\gamma r}$.

22. Пусть заряды шаров равны $+q$ и $-q$, тогда их потенциалы относительно бесконечности выражаются формулами $\varphi_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$; $\varphi_2=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$, откуда получаем разность потенциалов между шарами: $U=\varphi_1-\varphi_2=\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a}$.

Вводим это выражение в формулу напряженности поля у поверхности шаров: $|E|=|E_n|=\left|\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right|=\frac{U}{2a}$.

Находим ток через поверхность одного шара:

$$I=\int_S j_n\,dS=\gamma\int_S E_n\,dS=\gamma\frac{U}{2a}4\pi a^2=2\pi a\gamma U,$$

откуда определяется исходное сопротивление $R=\frac{U}{I}=\frac{1}{2\pi a\gamma}$.

23. Плотность тока на расстоянии r от центра заземлителя находим делением полного тока утечки I на площадь полусферы $j=\frac{I}{2\pi r^2}$. Таким же образом запишется плотность тока на любом расстоянии r. Соответственно напряженность поля тока равна:

$$E_r=\frac{j}{\gamma}=\frac{I}{2\pi r^2\gamma}.$$

Тогда шаговое напряжение

$$U_{ш}=\int_r^{r+0,8}E_r\,dr=\frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+0,8}\right).$$

24. Закон преломления линий тока $\frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\operatorname{tg}\beta_2}=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$.

25. Для элементарной и полной напряженности соответственно имеем:

$$dH=\frac{I\,dl\sin(\vec{dl},\vec{r})}{4\pi r^2},\quad H=\int_l\frac{I\,dl\sin(\vec{dl},\vec{r})}{4\pi r^2},$$

Подстановка тригонометрических соотношений $l = R\,\mathrm{ctg}\,(180^\circ - \varphi) = -R\,\mathrm{ctg}\,\varphi$, $dl = \frac{R}{\sin^2\varphi}\,d\varphi$, $r = \frac{R}{\sin\varphi}$ позволяет преобразовать интеграл к виду

$$H = \frac{I}{4\pi R}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi\, d\varphi = \frac{I}{4\pi R}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2).$$

В случае бесконечно длинного прямолинейного тока ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$) получим $H = \frac{I}{2\pi R}$ $\left(\text{в системе СГС } H = \frac{2I}{cR}\right)$.

26. Расположенные симметрично элементы тока $I\,d\vec{l}_1$ и $I\,d\vec{l}_2$ порождают поле напряженностью $2dH\sin\alpha$, направленное вдоль оси кольцевого тока. Следовательно,

$$H = \Sigma\, dH \sin\alpha \quad \text{и} \quad H = \int_{l=2\pi a} \frac{I\,dl}{4\pi r^2}\sin\alpha = \frac{aI}{2r^2}\sin\alpha.$$

При подстановке $r = \sqrt{a^2 + d^2}$ и $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}$ получаем: $H = \frac{a^2 I}{2(a^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$.

В центре кольца ($d = 0$) $H = \frac{I}{2a}$.

27. На расстоянии a поле первого тока равно:

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi a},$$

на метр длины проводника со вторым током действует сила:

$$F_{12} = \mu_0 I_2 l_2 H_1 = \mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{2\pi a}.$$

28. Как указывалось в пояснении, допустимо приближение

$$\oint_L H_l\,dl = \int_l H_l\,dl + \int_{NaS} H_l\,dl \approx \int_l H_l\,dl = Hl.$$

В соответствии с законом полного тока $Hl = In$, т. е. $H = \frac{In}{l}$.

29. Во внешнем пространстве имеем для циркуляции по окружности радиусом r_e: $\oint_L H_{le}\,dl = H_e 2\pi r_e = I = j\pi a^2$, откуда

$$H_e = \frac{I}{2\pi r_e}.$$

При переходе к внутреннему полю надо учесть, что контур обхода охватывает ток $j\pi r_i^2$, поэтому

$$\oint_L H_{li}\,dl = H_i 2\pi r_i = j\pi r_i^2,$$

откуда

$$H_i = \frac{j r_i}{2}.$$

30. В соответствии с указанием к упражнению запишем выражение для векторного потенциала бесконечно длинного прямого тока:

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{1}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2},$$

Вычисление $\vec{H}$ по $\vec{A}$ производят на основе определения:

$$\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{A}.$$

Находим составляющие H по декартовым осям:

$$H_x=\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}_x\vec{A}=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial A_z}\right)=\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_z}{\partial y}=$$
$$=-\frac{I}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}=-\frac{I}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Аналогично находим: $H_y=\frac{I}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$; $H_z=0$.

$$H=\sqrt{H_x^2+H_y^2+H_z^2}=\frac{I}{2\pi\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{I}{2\pi r}.$$

31. Сравниваем амплитудные значения плотностей тока проводимости j_0 и тока смещения $j_{0,\,смещ}$ в граните при $f=10^3$ Гц: $\frac{j_0}{j_{0,\,смещ}}=\frac{1}{50}$.

32. Вращающий момент сил, действующих в магнитном поле на рамку с током I, находим по формуле $K=-\frac{\partial U}{\partial\theta}=-ISB\sin\theta$.

Рамка находится в равновесии при $K=0$, т. е. при $\theta=0$ и $\theta=\pi$. Первое положение равновесия соответствует минимуму, второе—максимуму потенциальной функции U; первое положение является устойчивым равновесием.

33. В рассматриваемом случае выражение для коэффициента взаимной индукции L_{12} сводится к сумме интегралов, относящихся к парам параллельных сторон обоих прямоугольников. Для двух параллельных прямых длиной l, находящихся на расстоянии h друг от друга, имеем:

$$L(l,\,h)=\iint\frac{dl_1\,dl_2}{R}=\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{dx_1\,dx_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+h^2}}=$$
$$=\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}dx_2\left[\ln(x_1-x_2)+\sqrt{(x_1-x_2)^2+h^2}\right]_{x_1=-\frac{l}{2}}^{x_1=\frac{l}{2}},$$

где x_1 и x_2—текущие координаты точек обоих отрезков, отсчитываемых от их центров. Интегрирование по частям каждого из членов разности, получаемой после подстановки вместо x_1 его значений $\pm\frac{l}{2}$, дает:

$$L(l,\,h)=2h-2\sqrt{l^2+h^2}+2l\ln\frac{l+\sqrt{l^2+h^2}}{h}.$$

34. Используя упрощения, связанные с цилиндрической формой проводника, переходим в выражении для вектора Умова—Пойнтинга к численным значениям: $S=EH=\frac{ja}{2}\cdot\frac{j}{\gamma}=\frac{j^2a}{2\gamma}$. В участок цилиндра длиной l с боковой поверхностью $2\pi al$ ежесекундно проникает энергия:

$$S\cdot 2\pi al=\frac{j^2a}{2\gamma}\cdot 2\pi al=\frac{j^2}{\gamma}\pi a^2 l=\frac{j^2}{\gamma}V,$$

где V — объем проводника. Множитель $\frac{j^2}{\gamma}$ по закону Джоуля — Ленца означает количество теплоты, выделяемой током в единицу объема в единицу времени.

35. В цилиндрических координатах (r, φ, z) имеем:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}=0;\quad \frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r}=0;$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi)-\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}=-\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial H(r, t)}{\partial t}.$$

Этой системе уравнений можно удовлетворить, положив $E_r=E_z=0$ и $E_\varphi=E_\varphi(r, t)$. Из последнего уравнения находим:

$$E_\varphi=\frac{1}{r}\left\{-\mu_0\int\frac{\partial H(r, t)}{\partial t}r\,dr+f(t)\right\},$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени t. Таким образом, в плоскости, перпендикулярной к оси магнитного поля, линии напряженности вихревого электрического поля образуют систему концентрических окружностей с центрами, лежащими на оси магнитного поля.

36. Учитывая соотношение между E и H поля световой волны, получаем:

$H=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E$, $\quad S=EH=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E^2$, отсюда $\quad E=\sqrt{S\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}\approx 750$ В/м $=$ $= 2{,}5\cdot 10^{-2}$ ед. СГС, $H\approx 2$ А/м $\approx 2{,}5\cdot 10^{-2}$ Э.

37. $\frac{f_E}{f_H}=\frac{2\pi m v}{e\mu_0 H_0}\approx 10^8$ раз.

38. $v_1=\frac{c}{n_1}=1{,}827\cdot 10^{10}$ см/с; $v_2=\frac{c}{n_2}=1{,}835\cdot 10^{10}$ см/с; $v_3=\frac{c}{n_3}=1{,}852\times$ $\times 10^{10}$ см/с.

Средняя величина дисперсии в данном интервале

$$\frac{\Delta v}{\Delta\lambda}=\frac{v_3-v_1}{\Delta\lambda}=\frac{0{,}025\cdot 10^{10}}{1290}\,\frac{\text{см}}{\text{с}\cdot\text{Å}}.$$

По формуле Рэлея: $u=v-\lambda\frac{dv}{d\lambda}\approx 1{,}722\cdot 10^{10}$ см/с. Для соотношения фазовой и групповой скоростей получаем: $\frac{v_2}{u}\approx 1{,}066$.

39. Преобразуем формулу (65.4), основываясь на формуле приближенных вычислений $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha}}\approx 1+\alpha$. Соответственно

$$l_0=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\approx l\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right),$$

откуда $|l_0-l|=\Delta l=l\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)-l=\frac{1}{2}\beta^2 l=\frac{v^2}{c^2}r=6{,}4$ см.

40. В системе K' имеем:

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 0,$$

откуда вытекает: $t_2 - t_1 - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1) = 0$ и $t_2 - t_1 = \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)$.

Правая часть этого равенства положительна: $\frac{V}{c^2} > 0$, $(x_2 - x_1) > 0$ (из условия задачи). Следовательно, $t_2 > t_1$; таким образом, с точки зрения наблюдателя на Земле (на полотне железной дороги) удар молнии произошел в точке A (впереди поезда) позже, чем удар молнии в точке B (позади поезда).

41. Записываем проекции скорости капли в момент попадания ее на стекло относительно системы K: $v_x = 0$; $v_y = -v$; $v_z = 0$.

В штрихованной системе K', связанной с вагоном, проекции скорости в соответствии с формулой (68.1) — (68.3) равны: $v_x' = -V$; $v_y' = -v\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$; $v_z' = 0$. Отсюда получается выражение для отклонения капли от вертикали:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_x'}{v_y'} = \frac{V}{v\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \approx \frac{V}{v}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right). \qquad (a)$$

Применяя преобразования Галилея, получаем: $v_x' = -V$; $v_y' = -v$; $v_z' = 0$, откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{V}{v}. \qquad (б)$$

Сопоставление релятивистского результата (*a*) с классическим (*б*) показывает, что разница зависит от $\frac{V^2}{c^2}$ (эффект второго порядка).

Полагая скорость трамвая $V = 10$ м/с, получаем: $\frac{V^2}{c^2} \approx 10^{-15}$; измерение угла с такой точностью лежит за пределами возможностей измерительной техники.

42. а) Для земного наблюдателя расстояние между ракетами за каждую секунду (по часам Земли) увеличивается на 480 000 км. Это отнюдь не противоречит постулату о предельном значении скорости, равном c, поскольку здесь речь не идет о скорости тела.

б) Пользуемся формулой (68.1), так как скорости V, v и v' направлены вдоль одной прямой в одну сторону:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{Vv}{c^2}} = \frac{0{,}8c + 0{,}8c}{1 + \frac{0{,}64c^2}{c^2}} \approx 0{,}976c \approx 2{,}93 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

43. Проверка выполняется подстановкой в левую часть записанного равенства соответствующих формул преобразований Лоренца (64.9):

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1 - V(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c_2}}}$$

с последующим возведением в квадрат.

44. Из формул (64.3) и (71.11) имеем:

$$t = \frac{\mathscr{E}\tau}{m_0 c^2}.$$

Учитывая, что масса покоя π-мезона равна $m_0 = 273 \cdot 9 \cdot 10^{-31}$ кг, получаем: $t \approx 3{,}5 \cdot 10^{-7}$ с.

Из формулы (71.11) находим скорость мезона $v = V = c\sqrt{1 - m_0^2 \frac{c^4}{\mathscr{E}^2}}$ и его путь с момента рождения до гибели (в лабораторной системе), полагая скорость неизменной: $s = vt = 106$ м.

45. Энергия покоя электрона $\mathscr{E}_0 = m_0 c^2 = 0{,}51$ МэВ. Преобразуем релятивистскую формулу кинетической энергии к виду

$$\frac{T}{m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1.$$

Но левая часть по условию задачи равна двум, отсюда легко вычислить $v = 2{,}83 \cdot 10^8$ м/с.

46. Использование тригонометрических таблиц существенно облегчает вычисление скорости, стоящей под знаком квадратного корня. В нашем случае

$$\cos\alpha = \frac{m_0 c^2}{eU + m_0 c^2} \approx 0{,}84,$$

откуда $\alpha \approx 32°$, $\sin\alpha \approx 0{,}53$.

Возвращаясь к исходной подстановке, получаем: $v = c\sin\alpha \approx 3 \cdot 10^8 \cdot 0{,}53 \approx$ $\approx 1{,}6 \cdot 10^8$ м/с.

В нерелятивистском приближении

$$T = eU = \frac{mv^2}{2};$$

отсюда $v_{\text{нерел}} = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \approx 1{,}9 \cdot 10^8$ м/с.

Тот факт, что в расчетах такого рода релятивистская скорость частицы всегда меньше скорости, вычисляемой по формулам нерелятивистской физики, легко понятен: в нем проявляется существование предельной скорости движения частиц.

47. Указанное в упражнении 39 правило приближенного вычисления позволяет осуществить следующее преобразование:

$$\frac{1}{m_0 c^2 + \hbar\omega} = \frac{1}{m_0 c^2} \frac{1}{1 + \frac{\hbar\omega}{m_0 c^2}} \approx \frac{1}{m_0 c^2}\left(1 - \frac{\hbar\omega}{m_0 c^2}\right),$$

откуда получаем искомую формулу для скорости атома

$$v \approx \frac{\hbar\omega}{m_0 c}\left(1 - \frac{\hbar\omega}{m_0 c^2}\right).$$