ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Определения. Примеры

1. Уравнение с частными производными от неизвестных функций u_1, u_2, ..., u_N называется уравнением n-го порядка, если оно содержит хотя бы одну производную n-го порядка и не содержит производных более высокого порядка. Порядком системы уравнений с частными производными называется наибольший из порядков входящих в нее уравнений.

Уравнение с частными производными называется *линейным*, если оно линейно относительно всех неизвестных функций и их производных. Уравнение с частными производными называется *квазилинейным*, если оно линейно относительно всех старших производных от неизвестных функций. Так, например, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u^2=0$$

— квазилинейное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции u. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2u$$

— линейное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции u. А уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=u$$

— не линейное и не квазилинейное относительно этой функции.

Решением уравнения с частными производными называется всякая система функций, которая, будучи подставлена в уравнение вместо неизвестных функций, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным. Аналогично определяется решение системы.

В этом курсе мы будем заниматься главным образом линейными уравнениями второго порядка с одной неизвестной функцией. Такими уравнениями являются, например, следующие:

1) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ — *«уравнение теплопроводности»*;

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ — *«волновое уравнение»*;

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0$ — *«уравнение Лапласа»*.

Многие физические задачи приводят к уравнениям с частными производными и, в частности, к только что указанным уравнениям.

2. Пример 1. Уравнение теплопроводности. Пусть мы имеем тело G, температура которого в точке (x_1, x_2, x_3) в момент t определяется функцией $u(t, x_1, x_2, x_3)$. Будем предполагать, что функция $u(t, x_1, x_2, x_3)$ имеет непрерывные производные второго порядка по переменным x_1, x_2, x_3 и непрерывную производную по t.

Вывод уравнения, описывающего процесс распространения тепла, основан на следующем законе.

Пусть поверхность S расположена внутри тела G; на поверхности S определен непрерывно меняющийся вектор нормали n. Количество тепла q, проходящее через поверхность S в сторону нормали n за промежуток времени от t_1 до t_2, определяется следующей формулой:

$$q=-\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_S k(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\right\}dt. \qquad (1,1)$$

Здесь $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная в точке (x_1, x_2, x_3) поверхности S по направлению нормали n; внутренний интеграл берется по поверхности S.

Положительная функция $k(x_1, x_2, x_3)$ называется коэффициентом внутренней теплопроводности тела в точке (x_1, x_2, x_3).

Формула (1,1) равносильна тому, что через бесконечно малую площадку dS за бесконечно малый промежуток времени dt протекает количество тепла, равное

$$dq = -k(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial n}\, dS\, dt.$$

В таком виде обычно формулируется физический закон теплопроводности.

Если площадка S лежит на границе тела и окружающей среды, то справедлив следующий закон. Пусть $u(t, x_1, x_2, x_3)$, как и прежде, обозначает температуру тела G в точке (x_1, x_2, x_3), а $u_1(t, x_1, x_2, x_3)$ — температуру в произвольной точке (x_1, x_2, x_3), лежащей вне тела. Тогда количество тепла, входящего в тело через площадку S на границе тела за время от t_1 до t_2, определяется формулой

$$q = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S k_1(x_1, x_2, x_3)(u_1 - u)\, dS \right\} dt, \qquad (1',1)$$

где внутренний интеграл распространен по рассматриваемой поверхности S; функции u_1 и u определяются на S предельным переходом снаружи, соответственно изнутри, тела. В этом случае $k_1(x_1, x_2, x_3)$ называется коэффициентом внешней теплопроводности тела по отношению к данной среде.

Мы рассмотрим тело, изотропное в отношении теплопроводности, т. е. предположим функцию $k(x_1, x_2, x_3)$ не зависящей от направления нормали к поверхности S в точке (x_1, x_2, x_3). Кроме того, предположим, что эта функция имеет непрерывные первые производные по всем координатам.

Для вывода уравнения теплопроводности выделим внутри тела G некоторый объем D, ограниченный гладкой поверхностью S, и рассмотрим изменение количества тепла в этом объеме за промежуток времени от t_1 до t_2.

Через поверхность S по формуле (1,1) входит количество тепла, равное

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S k(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial n}\, dS \right\} dt, \qquad (2,1)$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ означает производную по направлению внешней нормали поверхности к S.

С другой стороны, это же количество тепла можно определить через изменение температуры в объеме D за промежуток времени от t_1 до t_2. Изменение количества тепла равно

$$\iiint\limits_D c(x_1, x_2, x_3)\rho(x_1, x_2, x_3)[u(t_2, x_1, x_2, x_3) - \\ - u(t_1, x_1, x_2, x_3)]\,dx_1\,dx_2\,dx_3, \quad (3,1)$$

где $\rho(x_1, x_2, x_3)$ — плотность, а $c(x_1, x_2, x_3)$ — теплоемкость тела в точке (x_1, x_2, x_3) *), интеграл распространен по области D. Приравняв (2,1) и (3,1), получим:

$$\iiint\limits_D c\rho[u(t_2, x_1, x_2, x_3) - u(t_1, x_1, x_2, x_3)]\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \\ = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\iint\limits_S k(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\right\}dt. \quad (4,1)$$

По формуле Остроградского

$$\iint\limits_S k\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \iiint\limits_D \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

Интеграл в левой части равенства (4,1) можно записать

---

*) Значение физических характеристик тела в определенной точке P (таких, как, например, плотность, теплоемкость и т. п.) понимается всегда как некоторый предел. А именно, берется последовательность кубов с центром в точке P со стороной, стремящейся к нулю. Рассматривается отношение соответствующей величины для каждого куба к объему этого куба и берется предел этого отношения, когда сторона куба стремится к нулю. Например, плотностью в точке называется предел отношения массы куба к его объему. Аналогично поверхностной плотностью в точке пластинки называется предел отношения массы квадратика с центром в этой точке к его площади. Линейной плотностью в точке стержня называется предел отношения массы отрезка с центром в рассматриваемой точке к длине отрезка. Аналогично определяются теплоемкость, теплопроводность в точке и т. п.

в виде

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_D c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\right\} dt,$$

так как $u(t_2, x_1, x_2, x_3) - u(t_1, x_1, x_2, x_3) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}\, dt.$

Таким образом, для любого объема D внутри тела G справедливо равенство

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2}\iiint_D \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt = 0$$

или

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D \left[c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right] dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt = 0.$$

Так как функции, стоящие под знаком интеграла, непрерывны, объем D и промежуток времени (t_1, t_2) произвольны, то для любой точки (x_1, x_2, x_3) тела G и для любого момента времени t должно выполняться равенство

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_i}\right). \tag{5,1}$$

Это уравнение называется *уравнением теплопроводности*, вообще говоря, неоднородного, но изотропного тела. Если тело однородно, то

$$k(x_1, x_2, x_3) = \text{const}, \quad c(x_1, x_2, x_3) = \text{const},$$
$$\rho(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$$

и уравнение (5,1) обращается в уравнение

$$\frac{c\rho}{k} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \tag{6,1}$$

Заменяя $\frac{k}{c\rho}t$ на t' и обозначая t' опять через t, мы приведем это уравнение к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}. \tag{7,1}$$

Уравнения (5,1) и (7,1) имеют много решений. Чтобы выделить из всей совокупности их решений какое-нибудь одно, надо поставить дополнительные условия, играющие ту же роль, что начальные условия в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Такими дополнительными условиями чаще всего являются так называемые *граничные условия*, т. е. условия, заданные на границе той области G пространства (x_1, x_2, x_3), где мы ищем решение уравнения с частными производными, и *начальные условия*, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени.

Физически ясно, что, во-первых, знание температуры тела в некоторый момент времени и теплового режима на границе тела должно полностью определять температуру в последующее время и, во-вторых, что сам этот тепловой режим может быть задан различным образом. Если область G совпадает со всем пространством, то можно доказать, что ограниченное решение уравнения теплопроводности при $t>t_0$ единственным образом определяется одними начальными условиями — значениями функции $u(t, x_1, x_2, x_3)$ в момент $t=t_0$. Для ограниченной области G можно, например, задать значение температуры в каждой точке тела в некоторый момент $t=t_0$ и задать значение температуры в каждой граничной точке тела при $t>t_0$. Оказывается, этих условий достаточно, чтобы единственным образом определить ограниченное решение при $t>t_0$ и $(x_1, x_2, x_3)\in G$.

Вместо того чтобы задавать $u(t, x_1, x_2, x_3)$ на границе G при $t>t_0$, можно для определения единственного решения уравнения теплопроводности задать на этой границе $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производную по внешней нормали к границе области G от искомой функции u. К такой математической задаче мы придем, если будем изучать температуру внутри тела G при условии, что нам всегда известно количество тепла, отдаваемого в любой промежуток времени (t_1, t_2) от внешнего пространства к поверхности тела G через любую площадку S

на границе тела. Оно должно равняться количеству тепла, передаваемого от площадки S внутрь тела; последнее количество тепла по формуле (1,1) равно

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt,$$

где $k>0$ — коэффициент теплопроводности в рассматриваемой граничной точке.

Таким образом, зная закон теплоотдачи для каждой площадки S границы области G, можно найти значения $\frac{\partial u}{\partial n}$ на границе G. В частности, если нет теплообмена через границу, то на ней $\frac{\partial u}{\partial n}=0$.

Можно, наконец, в качестве граничного условия задать при $t>t_0$ на границе G значения линейной комбинации

$$k\frac{\partial u}{\partial n}+k_1 u,$$

где k_1 — коэффициент теплопроводности при переходе от окружающего пространства к телу G, а k — коэффициент внутренней теплопроводности тела. Эти коэффициенты считаются известными. К такой математической задаче мы придем, если будем изучать температуру внутри тела G при условии, что нам известна температура u_1 среды, окружающей тело G. Тогда, составляя баланс количества тепла, проходящего через произвольный участок границы G, мы согласно формулам (1,1), (1′,1) найдем, что:

1. Количество тепла, проходящего за промежуток времени (t_1, t_2) через площадку S от окружающего пространства к поверхности тела, равно

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_S k_1(u_1-u)\,dS\,dt.$$

2. Количество тепла, переданного за это же время внутрь тела от куска S на его поверхности, равно

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt \qquad (k>0).$$

Так как (t_1, t_2) и S произвольны, то должно быть

$$k_1 u + k\frac{\partial u}{\partial n} = k_1 u_1.$$

В частности, если $u_1 \equiv 0$, то это условие обращается в условие

$$k\frac{\partial u}{\partial n} + k_1 u = 0.$$

Допустим, что температура в каждой точке (x_1, x_2, x_3) внутри тела G установилась, т. е. что она не меняется при увеличении t. Тогда $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ и уравнения (5,1) и (7,1) обратятся соответственно в уравнения

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0. \tag{8,1}$$

Для определения $u(x_1, x_2, x_3)$ теперь не надо уже задавать никаких начальных условий. Достаточно задать одни граничные условия, которые должны быть независимыми от времени. Физически это легко представить себе так. Если граничные условия не зависят от времени, то, какую бы начальную температуру мы ни задали, температура $u(t, x_1, x_2, x_3)$ в каждой точке (x_1, x_2, x_3) тела стремится к некоторому пределу $u(x_1, x_2, x_3)$ при $t \to \infty$. Предельная функция $u(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет стационарным уравнениям (8,1) и прежним, не зависящим от t, граничным условиям.

Задача определения решения какого-нибудь из уравнений (8,1) по его значениям на границе рассматриваемой области называется *задачей Дирихле* или *первой краевой задачей*.

Наряду с распространением тепла в пространстве часто приходится рассматривать изменение температуры вдоль стержня или в пластинке. Если при этом толщина однородного стержня такова, что температуру в точках одного и того же поперечного сечения можно считать одинаковой, и не происходит теплообмена со средой через боковую поверхность стержня, то температура u будет зависеть только от времени t и одной пространственной координаты x. Уравнение, которому будет подчинена функция $u(t, x)$ в этом случае, при соответствующем выборе единиц измерения имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{9,1}$$

Тому же уравнению (9,1) удовлетворяла бы температура $u(t, x_1, x_2, x_3)$ внутри трехмерного тела, если бы она зависела только от одной пространственной координаты, например от $x_1=x$. Так будет, если температура тела во всех точках каждой плоскости $x_1=\text{const}$ одинакова. Аналогично, изучая распространение тепла в однородной теплоизолированной плоской пластинке, мы придем к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \tag{10,1}$$

3. Пример 2. Уравнения равновесия и колебания мембраны. Мембраной мы называем натянутую пленку, которая сопротивляется растяжению и не сопротивляется изгибу, т. е. изменению формы, не вызывающему изменения площади произвольно взятого участка мембраны; работа внешней силы, вызывающей изменение площади некоторого участка, пропорциональна этому изменению. Положительный коэффициент пропорциональности T не зависит ни от формы этого участка, ни от его положения. Он называется *натяжением* мембраны.

Заметим для дальнейшего, что работа внутренних сил упругости равна по абсолютной величине работе внешних сил, вызывающих изменение площади, и противоположна ей по знаку.

Пусть *в состоянии покоя* мембрана расположена в плоскости (x_1, x_2) и имеет форму некоторой плоской области G с границей L.

Предположим, что на мембрану действует некоторая сила, плотность которой в точке (x_1, x_2) равна $f(x_1, x_2)$ (см. сноску на стр. 10) и направление которой перпендикулярно к плоскости (x_1, x_2). Под действием этой силы мембрана прогнется и примет форму некоторой поверхности, уравнение которой мы запишем в виде

$$u=u(x_1, x_2).$$

Ось u перпендикулярна к плоскости (x_1, x_2).

Мы выведем уравнение, которому удовлетворяет функция $u(x_1, x_2)$, при следующих ограничениях. Во-первых, мы предположим, что в интересующем нас положении равновесия поверхность мембраны не сильно изогнута, т. е. близка к куску плоскости. Другими словами, предположим, что производные $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ малы, и будем в наших рассуждениях пренебрегать высшими степенями этих производных. Во-вторых, мы предположим, что под действием силы $f(x_1, x_2)$ точки мембраны двигаются только по перпендикулярам к плоскости (x_1, x_2), так что их координаты (x_1, x_2) при этом не меняются.

Вывод уравнения будет опираться на одно из основных положений механики — принцип возможных перемещений, согласно которому в состоянии равновесия сумма элементарных работ всех действующих на систему сил при любом возможном (допускаемом наложенными связями) перемещении должна равняться нулю*).

Для вычисления элементарных работ найдем работу, произведенную силами, действующими на мембрану, при перемещении ее из первоначального плоского состояния в положение, задаваемое функцией $u(x_1, x_2)$. Работа силы, плотность которой равна $f(x_1, x_2)$, определяется интегралом

$$\iint_G f(x_1, x_2)\, u(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2,$$

так как на элемент мембраны $dx_1\, dx_2$ действует сила $f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$. Изменение площади мембраны при этом перемещении равно

$$\iint_G \left(\sqrt{1 + u_{x_1}'^2 + u_{x_2}'^2} - 1\right) dx_1\, dx_2,$$

а работа внутренних сил при этом изменении площади равна

$$-T \iint_G \left(\sqrt{1 + u_{x_1}'^2 + u_{x_2}'^2} - 1\right) dx_1\, dx_2.$$

Разложим подынтегральную функцию в ряд по степеням u_{x_1}' и u_{x_2}' и, воспользовавшись предположением о малости

*) См Г. К. Суслов, Теоретическая механика, Гостехиздат, 1946.

этих величин, отбросим старшие члены разложения. При этом для работы внутренних сил упругости получим выражение

$$-\frac{T}{2}\iint\limits_G \left[u'^2_{x_1}+u'^2_{x_2}\right] dx_1\,dx_2.$$

Поэтому работа всех действующих на мембрану внутренних сил и силы f при перемещении мембраны из положения покоя в некоторое положение $u(x_1,\ x_2)$ равна

$$A(u)=\iint\limits_G \left[-\frac{T}{2}\left(u'^2_{x_1}+u'^2_{x_2}\right)+fu\right] dx_1\,dx_2. \qquad (11,1)^{*)}$$

Произведем теперь некоторое возможное перемещение мембраны, т. е. добавим к $u(x_1,\ x_2)$ некоторую функцию $\delta u(x_1,\ x_2)$. Работа всех действующих сил при этом перемещении равна вариации интеграла (11,1), которую нетрудно подсчитать. Имеем

$$\delta A=A(u+\delta u)-A(u)\approx$$
$$\approx\iint\limits_G \left[-T\left(u'_{x_1}\delta u'_{x_1}+u'_{x_2}\delta u'_{x_2}\right)+f\delta u\right] dx_1\,dx_2. \qquad (12,1)$$

Она должна быть равной нулю согласно принципу возможных перемещений.

Интегрируя первые два слагаемых по частям, получим

$$\iint\limits_G \left(u'_{x_1}\delta u'_{x_1}+u'_{x_2}\delta u'_{x_2}\right) dx_1\,dx_2=$$
$$=\int\limits_L \frac{\partial u}{\partial n}\delta u\,ds-\iint\limits_G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\delta u\,dx_1\,dx_2,$$

откуда

$$\delta A=\int\limits_L -T\frac{\partial u}{\partial n}\delta u\,ds+\iint\limits_G (T\Delta u+f)\,\delta u\,dx_1\,dx_2, \qquad (13,1)$$

где через Δu обозначена сумма вторых производных

*) Интеграл (11,1) равен с точностью до знака потенциальной энергии мембраны в положении равновесия. Таким образом, мы можем сказать также, что наш вывод основан на том, что в положении равновесия потенциальная энергия всякой механической системы минимальна.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ означает производную по направлению внешней нормали к границе L. Как было указано выше, δu — возможное перемещение, т. е. перемещение, допускаемое связями, наложенными на мембрану. Эти связи накладываются обычно на край мембраны, поэтому функция $\delta u(x_1, x_2)$ во внутренних точках мембраны является произвольной непрерывной функцией. Следовательно, из равенства нулю δA можно сделать вывод, что для положения равновесия функция $u(x_1, x_2)$ в любой внутренней точке удовлетворяет уравнению

$$T\Delta u+f=0. \tag{14,1}$$

Это уравнение называется *уравнением Пуассона.*

Что же касается связей, то они сказываются на граничных условиях, которые могут быть весьма разнообразны. Мы отдельно рассмотрим наиболее часто встречающиеся случаи.

I. Закрепленная мембрана. Пусть край мембраны закреплен вдоль некоторой пространственной кривой, проектирующейся в L. Если параметрические уравнения L суть $x_1=x_1(s)$, $x_2=x_2(s)$, то мы требуем, чтобы мембрана проходила через некоторую кривую $x_1=x_1(s)$, $x_2=x_2(s)$, $u=\varphi(s)$. При этом единственным ограничением, наложенным на δu, будет $\delta u=0$ на L. Благодаря этому ограничению в формуле (13,1) исчезает криволинейный интеграл.

Полученная задача — найти решение уравнения Пуассона с граничным условием $u=\varphi(s)$ на L — называется *задачей Дирихле* для этого уравнения.

При $f=0$ уравнение Пуассона обращается в уравнение Лапласа, с которым мы уже встречались в предыдущем примере.

II. Свободная мембрана. Если мы не накладываем никаких ограничений на положение мембраны, то ее край может свободно перемещаться по вертикальной боковой поверхности цилиндра с основанием L. В этом случае δu произвольно как внутри, так и на границе G, и мы получаем для уравнения (14,1) условие на L

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0.$$

III. Часто встречается случай, когда кроме силы f, действующей на внутренние точки мембраны, к ее краю приложена вертикальная сила с линейной плотностью f_1, так что на элемент ds границы действует сила $f_1 ds$. Если мы ищем положение равновесия мембраны при этих условиях, то к интегралам (11,1) и (12,1) мы должны прибавить $\int\limits_L \left(\int\limits_0^u f_1\, du \right) ds$ и соответственно $\int\limits_L f_1\, \delta u\, ds$.

Криволинейный интеграл в формуле (13,1) имеет в этом случае вид

$$\int\limits_L \left(-T \frac{\partial u}{\partial n} + f_1 \right) \delta u\, ds,$$

и мы получаем для уравнения Пуассона краевое условие вида

$$T \frac{\partial u}{\partial n} - f_1 = 0$$

на линии L. Эта задача носит название *второй краевой задачи (задачи Неймана)*, если f_1 не зависит от u.

IV. Иногда рассматривается еще так называемое «упругое закрепление мембраны», т. е. случай, когда сила, действующая на край мембраны, пропорциональна отклонению:

$$f_1(s) = ku(s).$$

В этом случае краевое условие для уравнения Пуассона принимает вид $T \frac{\partial u}{\partial n} - ku = 0$.

Переходим теперь к выводу уравнения движения мембраны. Мы будем при этом рассматривать только малые и только поперечные колебания мембраны. Малость колебаний означает малость u, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, и она уже была нами использована при выводе формулы (11,1), а поперечными называются колебания в направлении перпендикуляра к плоскости (x_1, x_2). Таким образом, с изменением времени t координаты (x_1, x_2) фиксированной точки мембраны не изменяются, меняется только функция

$$u = u(t, x_1, x_2).$$

Скорость точки с координатами (x_1, x_2) равна $\frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial t}$; ускорение равно $\frac{\partial^2 u(t, x_1, x_2)}{\partial t^2}$. Чтобы получить уравнение движения мембраны, нужно по принципу Даламбера учесть силу инерции мембраны.

Плотность этой силы равна $-\rho(x_1, x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, где $\rho(x_1, x_2)$ — поверхностная плотность мембраны в точке (x_1, x_2). Мы получим уравнение поперечных колебаний мембраны, если в уравнении (14,1) заменим второе слагаемое на $-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$:

$$T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \qquad (15,1)$$

Возможные краевые условия при этом остаются те же, что и для уравнения (14,1), с той разницей, что задаваемые на границе функции могут теперь зависеть от времени. Чаще всего встречаются задача о мембране, край которой закреплен вдоль линии $L: u(t, x_1, x_2)=0$ на L, и задача о свободной мембране: $\frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial n}=0$ на L.

Как и в случае уравнения теплопроводности, физически очевидно, что одни граничные условия не могут единственным образом определить движение мембраны, так как оно существенно зависит от начального положения и начальной скорости. Действительно, в дальнейшем будет показано, что решение уравнения (15,1) определяется однозначно, если задать начальные условия

$$\left.\begin{aligned} u(t_0, x_1, x_2)&=\varphi_0(x_1, x_2),\\ u'_t(t_0, x_1, x_2)&=\varphi_1(x_1, x_2)\end{aligned}\right\}\quad (x_1, x_2)\in G \qquad (16,1)$$

и граничные условия какого-либо из рассмотренных типов.

Теоретически можно рассматривать так называемую неограниченную мембрану, т. е. колебания всей плоскости (x_1, x_2), подчиненные уравнению (15,1). К такой задаче мы можем прийти, если рассматриваемая мембрана настолько велика, что влиянием границы можно пренебречь.

В этом случае, как будет показано в дальнейшем, достаточно одних начальных данных, чтобы определить единственное решение уравнения (15,1). Если же мы для конечной мембраны зададим только условия (16,1), то этим решение однозначно определится не для всех значений t, а для каждой точки (x_1, x_2) только в некотором интервале $(-t_1, t_1)$, зависящем от точки. При этом величина этого интервала тем меньше, чем ближе точка (x_1, x_2) к границе области G.

Если ρ постоянно, то заменой независимых переменных уравнение (15,1) можно свести к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \tag{17,1}$$

Рассматривая малые колебания газа *(звуковые волны)*, можно при некоторых физических предположениях показать, что функция $u(t, x_1, x_2, x_3)$, характеризующая отклонение от нормального давления в точке (x_1, x_2, x_3) в момент времени t, удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \tag{18,1}$$

где $a > 0$ — постоянная *(скорость звука)*.

Уравнение вида (18,1) называется *волновым уравнением* в пространстве; многие другие колебательные процессы (например, электромагнитные) также описываются уравнением (18,1). Уравнение (17,1) называется волновым уравнением на плоскости.

В одномерном случае (колебание струны, колебание газа в трубке) соответствующая функция u удовлетворяет уравнению

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{19,1}$$

Это уравнение называется *уравнением колебаний струны*. Здесь $\rho(x)$ — линейная плотность в точке x, а T — натяжение струны. Начальные и граничные условия для уравнений (18,1) и (19,1) вполне аналогичны соответствующим условиям для уравнения (15,1).

Отметим еще раз, что уравнения (15,1), (18,1), (19,1) получаются только, если пренебречь величинами $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^4$ по сравнению с $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$. Если не сделать этого (не предполагать малости колебаний), то уравнения движения соответствующих упругих тел будут гораздо более сложными, нелинейными уравнениями.

Замечание 1. Если рассматривать t тоже как пространственную координату, то функция $u(t, x_1, x_2)$, описывающая колебания мембраны, будет определяться в цилиндре $Ц$ с образующими, параллельными оси Ot и проходящими через границу области G, над которой находится мембрана. Рассмотренная выше задача состояла в определении значений этой функции внутри цилиндра по некоторым условиям на боковой поверхности цилиндра $Ц$ и по значениям $u(t_0, x_1, x_2)$ и $u'_t(t_0, x_1, x_2)$, когда точка $(x_1, x_2) \in G$ находится на основании цилиндра. При такой трактовке этой задачи начальные условия при $t = t_0$ нельзя уже противопоставлять граничным условиям. И те и другие становятся краевыми условиями, заданными на границе цилиндра $Ц$.

Замечание 2. Когда мы рассматривали уравнение теплопроводности или уравнение колебаний в изотропной среде, в эти уравнения входили выражения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}. \tag{20,1}$$

Так бывает всегда в линейных уравнениях второго порядка, написанных для однородной изотропной среды двух или трех измерений, потому что выражения (20,1), называемые операторами Лапласа, примененными к функции u, или просто лапласианами, суть единственные, с точностью до постоянного множителя, линейные комбинации вторых частных производных от u, которые остаются инвариантными при любом ортогональном преобразовании, т. е. при повороте ортогональных координатных осей в двумерном или в трехмерном пространстве.

§ 2. Задача Коши. Теорема Ковалевской

1. Постановка задачи Коши. Пусть дана следующая система уравнений с частными производными относительно неизвестных функций $u_1, u_2, \ldots, u_N$ по независимым переменным $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i\left(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_N, \ldots, \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \ldots\right) \tag{1,2}$$

$$k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k \leqslant n_j; \quad k_0 < n_j; \quad i, j = 1, 2, \ldots, N).$$