Замечание 1. Если рассматривать t тоже как пространственную координату, то функция $u(t, x_1, x_2)$, описывающая колебания мембраны, будет определяться в цилиндре *Ц* с образующими, параллельными оси Ot и проходящими через границу области G, над которой находится мембрана. Рассмотренная выше задача состояла в определении значений этой функции внутри цилиндра по некоторым условиям на боковой поверхности цилиндра *Ц* и по значениям $u(t_0, x_1, x_2)$ и $u'_t(t_0, x_1, x_2)$, когда точка $(x_1, x_2) \in G$ находится на основании цилиндра. При такой трактовке этой задачи начальные условия при $t = t_0$ нельзя уже противопоставлять граничным условиям. И те и другие становятся краевыми условиями, заданными на границе цилиндра *Ц*.

Замечание 2. Когда мы рассматривали уравнение теплопроводности или уравнение колебаний в изотропной среде, в эти уравнения входили выражения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}. \tag{20,1}$$

Так бывает всегда в линейных уравнениях второго порядка, написанных для однородной изотропной среды двух или трех измерений, потому что выражения (20,1), называемые операторами Лапласа, примененными к функции u, или просто лапласианами, суть единственные, с точностью до постоянного множителя, линейные комбинации вторых частных производных от u, которые остаются инвариантными при любом ортогональном преобразовании, т. е. при повороте ортогональных координатных осей в двумерном или в трехмерном пространстве.

§ 2. Задача Коши. Теорема Ковалевской

1. Постановка задачи Коши. Пусть дана следующая система уравнений с частными производными относительно неизвестных функций $u_1, u_2, \ldots, u_N$ по независимым переменным $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i\left(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_N, \ldots, \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \ldots\right) \tag{1,2}$$

$$k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k \leqslant n_j; \quad k_0 < n_j; \quad i, j = 1, 2, \ldots, N).$$

Как видно из написанных уравнений, здесь для каждой из неизвестных функций u_i существует свой наивысший порядок n_i производных от этой функции, входящих в рассматриваемую систему. Независимое переменное t играет особую роль среди прочих независимых переменных, так как, во-первых, среди производных наивысшего порядка n_i от каждой функции u_i, входящих в данную систему, должна содержаться производная $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}}$, и, во-вторых, система разрешена относительно этих производных. Обычно в физических задачах роль t играет время, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — пространственные координаты. Число уравнений равно числу неизвестных функций.

При некотором значении $t = t_0$ задаются значения («начальные значения») неизвестных функций u_i и их производных по t до порядка $n_i - 1$. Пусть при $t = t_0$

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} = \varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n_i - 1). \quad (2,2)$$

Все функции $\varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ заданы в одной и той же области G_0 пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Производной нулевого порядка от функции u_i мы считаем саму функцию u_i.

Задача Коши состоит в том, чтобы найти решение системы (1,2), *удовлетворяющее при* $t = t_0$ *начальным условиям* (2,2).

Решение ищется в некоторой области G пространства $(t, x_1, \ldots, x_n)$, прилегающей к области G_0 на гиперплоскости $t = t_0$, где заданы условия (2,2).

Частным случаем задачи Коши является задача об определении колебаний неограниченной однородной мембраны по начальным условиям, упомянутая в предыдущем параграфе: определить решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

если при $t = t_0$ заданы

$$u(t_0, x_1, x_2) = \varphi^{(0)}(x_1, x_2) \text{ (начальное отклонение)},$$
$$u_t'(t_0, x_1, x_2) = \varphi^{(1)}(x_1, x_2) \text{ (начальная скорость)}.$$

Если $N=1$, $n_1=1$, $n=0$, сформулированная прежде задача Коши обращается в следующую задачу: найти такое решение $u(t)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt}=F(t, u),$$

чтобы $u(t_0)=u_0$. Эта задача подробно изучается в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Функция $F(z_1 z_2, \ldots, z_m)$ от m комплексных переменных называется *аналитической в окрестности точки* $\overset{0}{z}_1, \overset{0}{z}_2, \ldots, \overset{0}{z}_m$, если она разлагается в степенной ряд

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_m)=$$
$$=\sum_{k_1k_2\ldots k_m} A_{k_1k_2\ldots k_m}(z_1-\overset{0}{z}_1)^{k_1}(z_2-\overset{0}{z}_2)^{k_2}\ldots(z_m-\overset{0}{z}_m)^{k_m},$$

сходящийся при достаточно малых $|z_i-\overset{0}{z}_i|$. Легко доказать, что при этом $F(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ имеет в точке $\overset{0}{z}_1, \overset{0}{z}_2, \ldots, \overset{0}{z}_m$ производные всех порядков и

$$A_{k_1k_2\ldots k_m}=\frac{1}{k_1!\,k_2!\ldots k_m!}\left(\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_m}F}{\partial z_1^{k_1}\partial z_2^{k_2}\ldots\partial z_m^{k_m}}\right)_{z_1=\overset{0}{z}_1,\ldots, z_m=\overset{0}{z}_m}.$$

Пусть $\varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — начальные данные задачи Коши для системы (1,2) (см. формулу (2,2)). Введем сокращенные обозначения для производных этих функций в некоторой точке $(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n)$:

$$\left(\frac{\partial^{k-k_0}\varphi_i^{(k_0)}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right)_{x_1=\overset{0}{x}_1,\ldots, x_n=\overset{0}{x}_n}=\overset{0}{\varphi}_{i, k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n}$$

$$(i=1, 2, \ldots, N; \quad k_0+k_1+\ldots+k_n=k\leqslant n_i).$$

Имеет место следующая фундаментальная

Теорема Ковалевской. *Если все функции* F_i аналитичны в некоторой окрестности точки $(t_0, \overset{0}{x}_1, \ldots, \overset{0}{x}_n, \ldots$ $\ldots, \overset{0}{\varphi}_{j,k_0,k_1,\ldots,k_n}, \ldots)$ *и все функции* $\varphi_j^{(k)}$ *аналитичны в окрестности точки* $(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n)$, *то задача Коши имеет аналитическое решение в некоторой окрестности точки*

$(t^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *и притом единственное в классе аналитических функций.*

3. Доказательство теоремы Ковалевской мы дадим для произвольных линейных систем. Задача Коши для таких систем легко сводится к задаче Коши для линейных систем первого порядка с помощью приема, который мы, для простоты изложения, проиллюстрируем на примере одного уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} a_{0i}(t, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x_i} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b_0(t, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial t} +$$
$$+ c(t, x_1, \ldots, x_n) u + f(t, x_1, \ldots, x_n), \tag{3,2}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, b_i, c, f — аналитические функции своих аргументов в окрестности точки $(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Задача Коши для этого уравнения состоит в нахождении решения, удовлетворяющего следующим начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} u(t^0, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_0(x_1, \ldots, x_n), \\ u_t(t^0, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{4,2}$$

где φ_0 и φ_1 — аналитические функции в окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Без ограничения общности можно считать, что

$$t^0 = x_1^0 = \ldots = x_n^0 = 0,$$

так как случай произвольных t^0, x_1^0, $\ldots$, x_n^0 сводится к этому заменой независимых переменных, которая не меняет вид уравнения.

Если функция $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет уравнению (3,2) и начальным условиям (4,2), то очевидно, что функции

$$u, \quad u_0 = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} a_{0i}\frac{\partial u_0}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n} b_i u_i+b_0 u_0+cu+f, \tag{5,2}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\quad (k=1,2,\ldots,n), \tag{5,2)'$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u_0 \tag{5,2)''$$

и начальным условиям

$$u(0, x_1, \ldots, x_n)=\varphi_0(x_1, \ldots, x_n), \tag{6,2}$$

$$u_0(0, x_1, \ldots, x_n)=\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \tag{6,2)'$$

$$u_k(0, x_1, \ldots, x_n)=\frac{\partial \varphi_0(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k} \tag{6,2)''$$

$$(k=1, \ldots, n).$$

Докажем обратное утверждение: если функции u, u_0, $u_1, \ldots, u_n$ удовлетворяют уравнениям (5,2), (5,2)′, (5,2)″ или, короче, (5,2) в некоторой области G пространства $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, прилегающей к области G_0 пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и начальным условиям (6,2), (6,2)′, (6,2)″ в области G_0, то во всей области G функция $u(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет уравнению (3,2) и начальным условиям (4,2).

Действительно, из соотношения (5,2)″ следует, что всюду в области G

$$u_0=\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Подставляя $\frac{\partial u}{\partial t}$ вместо u_0 в правую часть (5,2)′, получим:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x_k}\quad\text{или}\quad \frac{\partial}{\partial t}\left[u_k-\frac{\partial u}{\partial x_k}\right]=0. \tag{7,2}$$

Поэтому величина

$$u_k-\frac{\partial u}{\partial x_k}$$

не зависит от t во всей области G,

По условию $(6,2)''$ при $t=0$ в области G

$$u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

Поэтому из (7,2) следует, что при всех t в области G

$$u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}\,^{*)}. \tag{8,2}$$

Подставляя $u_0 = \frac{\partial u}{\partial t}$ и $u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$ в (5,2), мы получаем, что уравнение (3,2) удовлетворяется всюду в G.

Итак, мы показали, что система (5,2) эквивалентна уравнению (3,2), если при $t=0$

$$u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

При произвольных же начальных условиях система (5,2) в некотором смысле богаче решениями, чем уравнение (3,2), так как произвольные начальные условия для решения u, u_0, $u_1, \ldots, u_n$ не обязательно должны быть связаны соотношениями $u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$.

З а д а ч а 1. Покажите, что задачу Коши для любой системы (1,2) можно свести к задаче Коши для некоторой системы первого порядка вида (1,2).

---

*) Строго говоря, из предыдущих рассуждений следует только, что

$$u_k - \frac{\partial u}{\partial x_k}$$

не зависят от t на каждом отрезке прямой, параллельной оси Ot, целиком лежащем внутри G. Следовательно, $u_k - \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0$ в той части области G, которая покрывается целиком лежащими внутри G и пересекающими G_0 отрезками прямых, параллельных оси t. Но так как рассматриваемые функции аналитичны, то по известной теореме теории аналитических функций отсюда следует обращение их в нуль во всей области G.

Очевидно, задачу Коши для уравнения (3,2) можно свести к задаче Коши для системы (5,2) указанным способом, не предполагая аналитичности коэффициентов уравнения и начальных функций, если область G выпукла по t, т. е. прямая, параллельная оси t, пересекает границу G не более чем в двух точках.

Задача 2. Покажите, что задачу Коши для нелинейной системы первого порядка вида (1,2) можно дифференцированием уравнений системы, введением новых неизвестных функций и дополнительных уравнений свести к задаче Коши для квазилинейной системы уравнений первого порядка, т. е. для системы, линейной относительно всех производных.

4. Таким образом, задача Коши для линейного уравнения второго порядка (3,2) свелась к задаче Коши для линейной системы (5,2) первого порядка. Совершенно так же можно любую систему вида (1,2) свести к системе уравнений первого порядка, разрешенной относительно производных по t от всех неизвестных функций. Поэтому мы докажем теорему Ковалевской для произвольной линейной системы, которую можно записать в виде (1,2), если мы докажем ее для произвольной линейной системы первого порядка вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_{ij} u_j + c_i \qquad (9,2)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N)$$

с аналитическими коэффициентами при произвольных аналитических начальных условиях

$$u_i(0, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (10,2)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N).$$

Случай любых аналитических функций φ_i легко сводится к случаю, когда все

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0.$$

Для этого вместо прежних неизвестных функций $u_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ мы введем новые неизвестные функции

$$v_i(t, x_1, \ldots, x_n) = u_i(t, x_1, \ldots, x_n) - \varphi_i(x_1, \ldots, x_n). \qquad (11,2)$$

Функции v_i будут удовлетворять системе уравнений:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_{ij} v_j +$$

$$+ \left(c_i + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_{ij} \varphi_j \right), \qquad (12,2)$$

вполне аналогичной системе (9,2), и начальным условиям

$$v_i(0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0. \tag{13,2}$$

Доказав существование решения задачи Коши для системы (12,2) с нулевыми начальными условиями, мы докажем тем самым и разрешимость исходной задачи.

Для сокращения записи мы будем считать, что уже исходные функции $u_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяют начальным условиям

$$u_i(0, x_1, \ldots, x_n) \equiv 0. \tag{14,2}$$

5. Докажем сначала единственность решения задачи Коши для системы (9,2) при начальных условиях (14,2) в классе аналитических функций вблизи точки O с координатами $t=0$, $x_1=0, \ldots, x_n=0$, т. е. докажем, что ни в какой окрестности этой точки не существует двух различных аналитических решений системы (9,2), удовлетворяющих при $t=0$ одним и тем же начальным условиям (14,2). Аналитические в окрестности начала координат функции $u_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ вблизи начала разлагаются в степенные ряды по $t, x_1, \ldots, x_n$. Коэффициент $\overset{i}{a}_{k_0 k_1 \ldots k_n}$ при $t^{k_0} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ в разложении функции $u_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ равен

$$\frac{1}{k_0!\, k_1! \ldots k_n!}\left(\frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_n} u_i}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right)_{t=x_1=\ldots=x_n=0}.$$

Мы докажем единственность решения задачи Коши, если покажем, что начальные условия (14,2) определяют единственным образом коэффициенты разложения функций u_i, удовлетворяющих системе (9,2), в степенные ряды по $t, x_1, \ldots, x_n$ или, что все равно, если мы покажем, что эти условия единственным образом определяют значения всех производных от u_i в точке O с координатами $t=x_1=\ldots=x_n=0$. Будем определять эти производные последовательно. Начальные условия определяют единственным образом значения в точке O всех производных вида

$$\left(\frac{\partial^{k} u_i}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right)_{t=x_1=\ldots=x_n=0}. \tag{15,2}$$

Все эти производные равны нулю, так как тождества (14,2) можно дифференцировать по $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Допустим, что решение задачи Коши существует. Подставим вместо u_j в уравнения (9,2) функции, составляющие это решение. Продифференцируем все полученные тождества k_1 раз по x_1, k_2 раз по $x_2, \ldots, k_n$ раз по x_n. Тогда в левых частях получатся производные вида

$$\frac{\partial^{k+1} u_i}{\partial t\, \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \tag{16,2}$$

а в правых — производные по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ от неизвестных функций и коэффициентов уравнения, т. е. величины, однозначно определенные в точке O уравнениями и начальными условиями. Полученные тождества определяют в точке O значения производных вида (16,2) (одно дифференцирование по t).

Продифференцируем каждое из тождеств (9,2) один раз по t, k_1 раз по $x_1, \ldots, k_n$ раз по x_n. Тогда в правых частях получатся выражения, составленные из производных от u_i вида (16,2) и (15,2) и производных от коэффициентов $a_{ij}^{(k)}$, b_{ij} и c_i. В левых же частях получатся производные вида

$$\frac{\partial^{k+2} u_i}{\partial t^2 \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \tag{17,2}$$

(два дифференцирования по t). Так как мы уже доказали, что производные вида (16,2) и (15,2) единственным образом определяются в точке O уравнениями (9,2) и начальными условиями (14,2), то отсюда следует, что единственным образом определяются и все производные (17,2) в точке O. Продолжая этот процесс, мы найдем, таким образом, что все производные от u_i определяются в точке O единственным образом уравнениями (9,2) и начальными условиями (14,2). Но значения всех производных аналитической функции $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ в фиксированной точке O однозначно определяют значения коэффициентов степенного ряда по $t, x_1, \ldots, x_n$, в который эта функция разлагается в окрестности O, и потому вполне определяют значения самой этой функции в некоторой окрестности точки O. Таким образом, два аналитических решения системы (9,2) с одними и теми же начальными условиями (14,2) обязательно совпадают в некоторой окрестности начала координат. Тем самым доказана единственность решения задачи Коши для системы (9,2) в классе аналитических функций.

6. В п. 5 мы показали, что начальные условия вполне определяют коэффициенты разложения функций u_i в степенные ряды по $t, x_1, \ldots, x_n$. Для доказательства существования решения задачи Коши нам достаточно доказать, что степенные ряды с коэффициентами, определенными в п. 5, сходятся в некоторой окрестности точки O. В самом деле, если эти ряды сходятся, то представляемые ими аналитические функции $u_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ равны нулю в точке O вместе со всеми их частными производными по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (см. (15,2)). Следовательно, они тождественно по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны нулю при $t=0$ и потому эти функции удовлетворяют начальным условиям (14,2). Что эти функции удовлетворяют системе (9,2), следует из того, что по самому способу построения этих функций в точке O левые части уравнений (9,2), если в них подставить определенные таким образом u_i, вместе со всеми их производными по $t, x_1, \ldots, x_n$, совпадают со значениями в этой точке правых частей этих уравнений и соответствующих их производных. Следовательно, левые части уравнений тождественно равны правым в некоторой окрестности начала координат.

Для доказательства сходимости степенных рядов, полученных нами для функций u_i, воспользуемся *методом мажорант*.

7. Мажорантой (или мажорирующей функцией) для функции $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$, аналитической в некоторой окрестности точки $(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$, называется всякая функция $\psi(t, x_1, \ldots, x_n)$, аналитическая в этой окрестности, у которой все коэффициенты разложения в степенной ряд по $t-t^0$, $x_1-x_1^0, \ldots$ $\ldots, x_n-x_n^0$ положительны или равны нулю и не меньше абсолютных величин соответствующих коэффициентов разложения функции $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$.

Перенесем начало координат в точку $(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и построим для функции $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$, аналитической в окрестности начала координат, мажоранту специального вида, которой мы будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть

$$\varphi(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum c_{k_0 k_1 \ldots k_n} t^{k_0} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}. \tag{18,2}$$

Ряд в правой части абсолютно сходится в некоторой точке

$$t=a_0,\ x_1=a_1,\ \ldots,\ x_n=a_n, \text{ где все } |a_i|>0.$$

Тогда существует такое положительное M, что при всех целых неотрицательных $k_0, k_1, \ldots, k_n$

$$|c_{k_0k_1\ldots k_n}a_0^{k_0}a_1^{k_1}\ldots a_n^{k_n}|\leqslant M.$$

Следовательно, при всех $k_0, k_1, \ldots, k_n$

$$|c_{k_0k_1\ldots k_n}|\leqslant\frac{M}{|a_0|^{k_0}|a_1|^{k_1}\ldots|a_n|^{k_n}}.$$

Поэтому функция

$$S=\frac{M}{\left(1-\frac{t}{|a_0|}\right)\left(1-\frac{x_1}{|a_1|}\right)\ldots\left(1-\frac{x_n}{|a_n|}\right)}=$$

$$=M\left[\sum_{k_0=0}^{\infty}\left(\frac{t}{|a_0|}\right)^{k_0}\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_1}{|a_1|}\right)^{k_1}\ldots\sum_{k_n=0}^{\infty}\left(\frac{x_n}{|a_n|}\right)^{k_n}\right]=$$

$$=\sum_{k_0,k_1,\ldots,k_n}\frac{M}{|a_0|^{k_0}|a_1|^{k_1}\ldots|a_n|^{k_n}}t^{k_0}x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}\qquad(19,2)$$

является мажорантой для функции $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$.

Можно указать и другой прием для построения мажорантного ряда. Так, например, для функции $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$, представленной рядом (18,2), мажорантой будет также следующая функция:

$$\frac{M}{1-\frac{t+x_1+\ldots+x_n}{a}},$$

где $a=\min(|a_0|,\ |a_1|,\ \ldots,\ |a_n|)$, $a_i\neq 0\ (i=0, 1, \ldots, n)$ и $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ — некоторая точка сходимости ряда (18,2).

Действительно, при $|t|+|x_1|+\ldots+|x_n|<a$ эта функция разлагается в ряд

$$M\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t+x_1+\ldots+x_n}{a}\right)^k=$$

$$=M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{a^k}\sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n=k}\frac{k!}{k_0!\,k_1!\ldots k_n!}t^{k_0}x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n};\qquad(20,2)$$

но

$$\frac{(k_0+k_1+\ldots+k_n)!}{k_0!\,k_1!\ldots k_n!}\geqslant 1;\quad \frac{1}{a^k}\geqslant\frac{1}{|a_0|^{k_0}\,|a_1|^{k_1}\ldots|a_n|^{k_n}},$$

т. е. коэффициенты нашего ряда положительны и не меньше соответствующих коэффициентов ряда (19,2). Таким образом, функция (20,2) также является мажорантой для (18,2).

Точно так же для функции $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$ будет мажорантой функция

$$\frac{M}{1-\dfrac{\dfrac{t}{\alpha}+x_1+\ldots+x_n}{a}}=M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{t}{\alpha}+x_1+\ldots+x_n\right)^k}{a^k},\qquad (21,2)$$

где a имеет прежнее значение, а $0<\alpha<1$.

Если здесь разложить опять $\left(\frac{t}{\alpha}+x_1+\ldots+x_n\right)^k$ по степеням $t, x_1, \ldots, x_n$, то получится ряд, у которого коэффициенты положительны и больше соответствующих коэффициентов разложения по степеням $t, x_1, \ldots, x_n$ функции (20,2), так как коэффициенты первого из этих рядов получаются из соответствующих коэффициентов второго ряда умножением на $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k_0}$, где $0<\alpha<1$.

Замечание 1. Пусть имеется степенной ряд

$$\varphi(z_1, \ldots, z_m)=\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_m} A_{k_1 k_2 \ldots k_m} z_1^{k_1} z_2^{k_2}\ldots z_m^{k_m},$$

сходящийся при $|z_1|\leqslant d_1+\varepsilon, \ldots, |z_m|\leqslant d_m+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — некоторое число. Пусть M^* — наибольшее значение модуля функции $\varphi(z_1, \ldots, z_m)$, когда $z_1, \ldots, z_m$ принимают действительные и комплексные значения, удовлетворяющие условиям

$$|z_1|\leqslant d_1, \ldots, |z_m|\leqslant d_m.$$

Можно показать (см. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, том III, часть 2, § 83, Физматгиз, 1958), что функция

$$\frac{M^*}{\left(1-\dfrac{z_1}{d_1}\right)\left(1-\dfrac{z_2}{d_2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{z_m}{d_m}\right)}$$

будет мажорантой для функции $\varphi(z_1, \ldots, z_m)$. Отсюда следует, что функция

$$\frac{M^*}{1-\frac{z_1+z_2+\ldots+z_m}{d}},$$

где $d=\min(d_1, \ldots, d_m)$, также будет мажорантой для $\varphi(z_1, \ldots, z_m)$.

8. Переходим теперь к доказательству существования решения задачи Коши для системы (9,2) при начальных условиях (14,2); назовем ее «задача I», а систему (9,2) будем называть «системой I».

Допустим, что мы как-то мажорировали коэффициенты системы и начальные данные Коши. Получим новую систему и новую задачу Коши (назовем их соответственно «система II», «задача II»). Покажем, что аналитическое решение «задачи II» будет мажорантой для аналитического решения «задачи I». Если решение «задачи I» представляется в окрестности начала степенным рядом

$$u_i=\sum a^{(i)}_{k_0k_1\ldots k_n} t^{k_0}x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}, \tag{22,2}$$

а решение «задачи II» рядом

$$U_i=\sum A^{(i)}_{k_0k_1\ldots k_n} t^{k_0}x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}, \tag{23,2}$$

то нам надо доказать неравенства между коэффициентами

$$\left|a^{(i)}_{k_0k_1\ldots k_n}\right|\leqslant A^{(i)}_{k_0k_1\ldots k_n}. \tag{24,2}$$

Для случая $k_0=0$ эти неравенства непосредственно вытекают из того, что начальные данные «задачи II» мажорируют начальные данные «задачи I». Для случая $k_0>0$ коэффициенты $a^{(i)}_{k_0k_1\ldots k_n}$, соответственно $A^{(i)}_{k_0k_1\ldots k_n}$, получаются при помощи сложения и умножения из коэффициентов $a^{(i)}$, соответственно $A^{(i)}$, имеющих меньший индекс k_0, и значений в точке O коэффициентов системы I, соответственно II, и их производных. Поэтому легко убедиться, что если для $k_0<k$ справедливы неравенства (24,2), то они справедливы и для $k_0=k$. Значит, они верны для всех коэффициентов разложений (22,2) и (23,2).

Следовательно, из разрешимости «задачи II» (сходимости ряда (23,2) следует разрешимость «задачи I» (сходимость ряда (22,2)). Но «задача II» может быть построена с большой степенью произвола, так как мы можем произвольно выбирать мажоранты для коэффициентов и начальных данных «задачи I». Выберем «задачу II» настолько простой, чтобы ее решение можно было просто найти. Для этого подберем числа $M > 0$ и $a > 0$ так, чтобы функция

$$\frac{M}{1-\dfrac{\dfrac{t}{\alpha}+x_1+\ldots+x_n}{a}}$$

при $0 < \alpha < 1$ была мажорантой для всех коэффициентов системы, кроме свободных членов. Для этих же последних выберем общую мажоранту вида

$$\frac{M_1}{1-\dfrac{\dfrac{t}{\alpha}+x_1+\ldots+x_n}{a}} \text{ *)}.$$

Это можно сделать, так как мажоранта такого вида существует у каждого коэффициента и для построения общей мажоранты надо числам M и M_1 придать наибольшее, а числу a — наименьшее из всех их значений, соответствующих различным коэффициентам. Выбрав таким образом числа M, M_1 и a, напишем мажорирующую систему в виде

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}=\frac{M}{1-\dfrac{\dfrac{t}{\alpha}+x_1+\ldots+x_n}{a}}\left[\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial U_j}{\partial x_k}+\sum_{j=1}^{N}U_j+m\right], \quad (25,2)$$

где число α, $0 < \alpha < 1$ выберем позже, а $m=\frac{M_1}{M}$.

Не фиксируя пока начальных данных, будем искать решение системы в виде

$$U_1(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv U_2(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv \ldots$$
$$\ldots \equiv U_N(t, x_1, \ldots, x_n) = U(t, x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= U\left(\frac{t}{\alpha}+x_1+\ldots+x_n\right) = U(z),$$

где $z=\frac{t}{\alpha}+x_1+\ldots+x_n$. Подставив предполагаемое ре-

*) Возможность выбора M_1 независимо от M нам очень полезна для дальнейшего (сравните с замечанием 2 в конце настоящего параграфа).

шение в систему (25,2), получим, что функция $U(z)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dz}=A(z)\left(Nn\frac{dU}{dz}+NU+m\right), \tag{26,2}$$

где $A(z)=\dfrac{M}{1-\dfrac{z}{a}}$. Это уравнение с разделяющимися переменными можно записать в виде

$$\frac{dU}{\frac{N}{m}U+1}=\frac{mA(z)\,dz}{\frac{1}{\alpha}-NnA(z)}=B(z)\,dz.$$

Выберем теперь положительное число α настолько малым чтобы в некоторой окрестности точки $z=0$ было

$$\frac{1}{\alpha}-NnA(z)>0. \tag{27,2}$$

Тогда $B(z)$ будет в этой окрестности аналитической функцией

Покажем, что частное решение уравнения (26,2)

$$U(z)=\frac{e^{\frac{N}{m}\int\limits_0^z B(\xi)\,d\xi}-1}{N}\,m$$

дает нам искомую мажоранту для решения «задачи I».

Так как функции $U_i(t, x_1, \ldots, x_n)=U\left(\frac{t}{\alpha}+\right.$ $\left.+x_1+\ldots+x_n\right)$ удовлетворяют системе (25,2), мажорирующей исходную систему, то для доказательства этого утверждения достаточно убедиться, что $U(z)$ при $t=0$ разлагается в ряд по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с положительными коэффициентами, т. е. является мажорантой тождественного нуля (начальных данных «задачи I»).

Действительно, $A(z)=\dfrac{M}{1-\dfrac{z}{\alpha}}$ есть функция с неотрицательными коэффициентами разложения по z. Следовательно,

$$B(z)=\frac{m\alpha A(z)}{1-\alpha A(z)Nn}=$$

$$=m\alpha A(z)\left[1+\alpha NnA(z)+\alpha^2N^2n^2A^2(z)+\ldots\right]$$

тоже имеет неотрицательные коэффициенты разложения по степеням z. Отсюда

$$C(z)=\frac{N}{m}\int_0^z B(z)\,dz,\quad e^{C(z)}-1=C(z)+\frac{C^2(z)}{2!}+\ldots,\quad U(z)$$

также обладают этим свойством. Поэтому и коэффициенты разложения $U(x_1+x_2+\ldots+x_n)$ по степеням $x_1, x_2, \ldots, x_n$ также неотрицательны, т. е. $U(0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ действительно является мажорантой нуля. Значит, функции $U_i(t, x_1, \ldots, x_n)=U\left(\frac{t}{\alpha}+x_1+\ldots+x_n\right)$ являются решением некоторой «задачи II». Аналитичность этого решения вытекает из того, что $U(z)$, как показано выше, разлагается в ряд по степеням z и, следовательно, в ряд по степеням t, $x_1, \ldots, x_n$. А отсюда, как было указано выше, следует сходимость степенных рядов (22,2), представляющих решение исходной задачи.

Этим доказательство теоремы Ковалевской для линейных систем заканчивается.

Замечание 2. Из доказательства теоремы видно, что ряды, дающие решение задачи Коши для системы (9,2), сходятся во всяком случае в той области, в которой сходятся ряды, дающие решение мажорирующей задачи. Отсюда следует, что решение первоначальной задачи Коши для системы (9,2) и начальных функций φ_i, не обязательно равных нулю, существует во всяком случае в некоторой области

$$\left|\frac{t}{\alpha}\right|<\rho,\ |x_1|<\rho,\ \ldots,\ |x_n|<\rho,\ \rho>0,$$

если коэффициенты системы (9,2) и начальные функции были голоморфны в области

$$|t|\leqslant R,\ |x_i|\leqslant R \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ R>0).$$

При этом ρ и α зависят только от R и от числа M, но они никак не зависят от значений начальных функций φ_i и свободных членов уравнений, так как ни α, ни та область изменения z, где выполняется (27,2), не зависят от этих значений.

Замечание 3. Для систем, не имеющих вида (1,2) теорема Ковалевской, вообще говоря, неверна, как показывает следующий пример, принадлежащий Ковалевской. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{28,2}$$

с начальным условием

$$u(0,\ x) = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1. \tag{29,2}$$

Легко видеть, что аналитическое решение $u(t,\ x)$ задачи (28,2), (29,2), если оно существует, в окрестности начала координат должно представляться рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \frac{t^n}{(1-x)^{2n+1}};$$

однако этот ряд расходится в каждой точке при $t \neq 0$.

Задача. Докажите теорему Ковалевской для квазилинейной системы уравнений первого порядка.

§ 3. Обобщение задачи Коши. Понятие о характеристике

1. Обобщение задачи Коши. Задается система N уравнений с N неизвестными функциями $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_N$

$$\Phi_i\left(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_N,\ \ldots,\ \frac{\partial^k u_j}{\partial x_0^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}},\ \ldots\right) = 0$$

$$(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{1,3}$$

Для каждой функции u_i существует свой наивысший порядок n_i частных производных этой функции по независимым переменным $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$, входящих в систему (1,3). В рассматриваемой области точек $(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ задается достаточно гладкая n-мерная поверхность S и в каждой точке поверхности некоторая линия l_γ не касательная к S и достаточно гладко изменяющаяся при движении вдоль S, например нормаль к поверхности. На этой поверхности задаются все функции u_i и их производные по направлению линии l до порядка $n_i - 1$. Эти условия на поверхности S являются обобщением условий Коши (начальных данных), рассмотренных в предыдущем параграфе. Требуется найти решение u_1,