вает следующий пример, принадлежащий Ковалевской. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{28,2}$$

с начальным условием

$$u(0,\ x)=\frac{1}{1-x},\qquad |x|<1. \tag{29,2}$$

Легко видеть, что аналитическое решение $u(t,\ x)$ задачи (28,2), (29,2), если оно существует, в окрестности начала координат должно представляться рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!}\,\frac{t^n}{(1-x)^{2n+1}};$$

однако этот ряд расходится в каждой точке при $t\neq 0$.

Задача. Докажите теорему Ковалевской для квазилинейной системы уравнений первого порядка.

§ 3. Обобщение задачи Коши. Понятие о характеристике

1. Обобщение задачи Коши. Задается система N уравнений с N неизвестными функциями $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_N$

$$\Phi_i\left(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_N,\ \ldots,\ \frac{\partial^k u_j}{\partial x_0^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}},\ \ldots\right)=0$$
$$(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{1,3}$$

Для каждой функции u_i существует свой наивысший порядок n_i частных производных этой функции по независимым переменным $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$, входящих в систему (1,3). В рассматриваемой области точек $(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ задается достаточно гладкая n-мерная поверхность S и в каждой точке поверхности некоторая линия l_γ не касательная к S и достаточно гладко изменяющаяся при движении вдоль S, например нормаль к поверхности. На этой поверхности задаются все функции u_i и их производные по направлению линии l до порядка n_i-1. Эти условия на поверхности S являются обобщением условий Коши (начальных данных), рассмотренных в предыдущем параграфе. Требуется найти решение u_1,

$u_2, \ldots, u_N$ системы (1,3) в некоторой окрестности поверхности S, которое удовлетворяло бы заданным на S условиям.

2. Попытаемся свести эту задачу к задаче Коши, сформулированной в предыдущем параграфе. Для простоты ограничимся сначала рассмотрением вместо системы (1,3) следующей линейной системы:

$$\sum_{j,\, k_0,\, k_1,\, \ldots,\, k_n} A_{ij}^{(k_0 \ldots k_n)}(x_0, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^n u_j}{\partial x_0^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + \ldots$$
$$\ldots + f_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (2,3)$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, N).$$

Мы выписали здесь только члены со старшими производными от неизвестных функций.

В окрестности поверхности S введем новые криволинейные координаты $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ таким образом, чтобы уравнение поверхности S приняло вид $\xi_0 = 0$, а линии l совпали с координатными линиями

$$\xi_1 = c_1, \ \xi_2 = c_2, \ \ldots, \ \xi_n = c_n.$$

Для этого уточним предположения о гладкости поверхности S и линий l. Предположим, что на поверхности можно ввести параметры $\xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x_0(\xi_1, \ldots, \xi_n), \\ x_1 &= x_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_n(\xi_1, \ldots, \xi_n), \end{aligned}\right\} \qquad (3,3)$$

так, что ранг функциональной матрицы

$$\left\| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \right\| \quad (i = 0, 1, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots, n)$$

равен n в каждой точке S и правые части в (3,3) — достаточно гладкие функции.

Пусть линии l задаются параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= X_0(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= X_n(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n), \end{aligned}\right\} \qquad (4,3)$$

где ξ_0 — параметр точки вдоль линии l, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — параметры точки пересечения l с S. При этом правые части уравнений (4,3) предполагаются достаточно гладкими функциями всех своих аргументов.

Относительно параметра ξ_0 предположим, что хотя бы одна из производных $\frac{\partial X_i}{\partial \xi_0}$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ отлична от нуля и что точке пересечения линии l с поверхностью S соответствует значение $\xi_0=0$ (т. е. уравнения (4,3) при $\xi_0=0$ совпадают с уравнениями (3,3) поверхности S).

Докажем теперь, что функциональный определитель

$$I=\begin{vmatrix} \frac{\partial X_0}{\partial \xi_0} & \frac{\partial X_1}{\partial \xi_0} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial \xi_0} \\ \frac{\partial X_0}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial \xi_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial X_0}{\partial \xi_n} & \frac{\partial X_1}{\partial \xi_n} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} \qquad (5,3)$$

отличен от нуля в некоторой окрестности поверхности S. На поверхности S, т. е. при $\xi_0=0$,

$$I=\begin{vmatrix} \frac{\partial X_0}{\partial \xi_0} & \frac{\partial X_1}{\partial \xi_0} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial \xi_0} \\ \frac{\partial x_0}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_0}{\partial \xi_n} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} \qquad (6,3)$$

Последние n строк определителя (6,3) линейно независимы, так как, по предположению, ранг функциональной матрицы $\left\| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \right\|$ $(i=0, 1, \ldots, n;\ k=1, \ldots, n)$ равен n. Если бы определитель (6,3) был равен нулю, то первая его строка, представляющая ненулевой касательный вектор к l, была бы линейной комбинацией последних n строк. Но это невозможно, так как последние n строк представляют собой векторы, лежащие в гиперплоскости, касательной к S, а линии l, по предположению, не касаются S.

По непрерывности определитель (5,3) отличен от нуля в некоторой окрестности S. Поэтому в этой окрестности

$\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ можно принять за новые координаты точки $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Перейдем к независимым переменным $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ в уравнениях (2,3). Нас особенно будут интересовать в преобразованных уравнениях члены, содержащие производные от u_i высших порядков n_i по ξ_0. Выписывая только эти члены, получим

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial x_0^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0}\right)^{k_0} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_1}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n}\right)^{k_n} + \ldots$$

Поэтому, выписывая только члены со старшими производными от функций u_i по ξ_0 в уравнениях, получившихся от преобразования уравнений (2,3), получим

$$\sum_{\substack{j=1 \\ k_0+\ldots+k_n=n_j}}^{N} A_{ij}^{(k_0 \ldots k_n)} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0}\right)^{k_0} \ldots \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n}\right)^{k_n} \frac{\partial^{n_j} u_j}{\partial \xi_0^{n_j}} + \ldots = 0 \qquad (7,3)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N).$$

Чтобы эти уравнения вблизи поверхности S можно было однозначно разрешить относительно $\frac{\partial^{n_j} u_j}{\partial \xi_0^{n_j}}$ при произвольных других членах уравнения, не выписанных явно, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках поверхности S был отличен от нуля определитель

$$\left| \sum_{k_0+\ldots+k_n=n_j} A_{ij}^{(k_0 k_1 \ldots k_n)} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0}\right)^{k_0} \ldots \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n}\right)^{k_n} \right|$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, N).$$

Тогда в силу непрерывности коэффициентов $A_{ij}^{(k_0 \ldots k_n)}$ и производных $\frac{\partial \xi_0}{\partial x_k}$ этот определитель будет отличен от нуля и в некоторой окрестности поверхности S в пространстве $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Уравнение

$$\left| \sum_{k_0+\ldots+k_n=n_j} A_{ij}^{(k_0 k_1 \ldots k_n)} (x_0, \ldots, x_n)\, \alpha_0^{k_0} \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} \right| = 0 \qquad (8,3)$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, N)$$

называется *характеристическим уравнением* для системы (2,3); здесь $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — некоторые параметры, причем $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i^2 \neq 0$. Направление гиперплоскости

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x_k - x_k^0) = 0$$

называется *характеристическим направлением* в точке $(x_0^0, \ldots, x_n^0)$ для системы (2,3), если

$$\left| \sum_{k_0+\ldots+k_n=n_j} A_{ij}^{(k_0 \ldots k_n)} (x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)\, \alpha_0^{k_0} \ldots \alpha_n^{k_n} \right| = 0\ ^{*)}.$$

Поверхность $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$ называется *характеристической поверхностью* для системы (2,3) или просто *характеристикой*, если в каждой точке этой поверхности

$$\left| \sum_{k_0+\ldots+k_n=n_j} A_{ij}^{(k_0 k_1 \ldots k_n)} (x_0, x_1, \ldots, x_n) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right)^{k_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right)^{k_n} \right| = 0$$

и по крайней мере одна из производных $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ отлична от нуля.

Из этих определений следует, что направление каждой касательной гиперплоскости к характеристической поверхности, или, как мы будем говорить для краткости, направление характеристической поверхности является всюду характеристическим.

3. Из предыдущего видно, что если направление поверхности S, о которой шла речь в формулировке обобщенной задачи Коши, нигде не является характеристическим для системы (2,3), то после введения координат $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ вместо $x_0, x_1, \ldots, x_n$, как было описано в п. 2, преобразо-

---

*) Так как уравнение (8,3) однородно относительно неизвестных $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, то эти неизвестные можно нормировать, считая, например, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 = 1$. Тогда α_k будет косинусом угла между нормалью к характеристической гиперплоскости и осью Ox_k.

ванную систему (7,3) вблизи поверхности S всегда можно разрешить относительно старших производных от u_i по ξ_0. Получится система

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}} = \sum_{j,k} B_{ij}^{(k_0 \dots k_n)} (\xi_0, \dots, \xi_n) \frac{\partial^k u_j}{\partial \xi_0^{k_0} \dots \partial \xi_n^{k_n}} + F_i(\xi_0, \dots, \xi_n) \tag{9,3}$$

$(i,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ N;\ k = k_0 + k_1 + \dots + k_n \leqslant n_j;\ k_0 < n_j)$.

Условия, заданные на поверхности S, перейдут в условия

$$\left(\frac{\partial^k u_i}{\partial \xi_0^k}\right)_{\xi_0 = 0} = \varphi_i^{(k)}(\xi_1, \dots, \xi_n); \quad \begin{matrix} k = 0,\ 1,\ \dots,\ n_i - 1, \\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ N. \end{matrix} \tag{10,3}$$

Таким образом, если поверхность S нигде не имела характеристического направления, обобщенная задача Коши свелась к прежней задаче Коши. Переход от первой из этих задач ко второй вполне обратим; каждому достаточно гладкому *) решению одной задачи соответствует единственное гладкое решение другой.

Но в предыдущем параграфе речь шла о решении системы с аналитическими коэффициентами и аналитическими начальными данными. Для того чтобы система (9,3) и задача Коши для нее удовлетворяли этим требованиям, достаточно выполнения следующих дополнительных условий:

а) Коэффициенты системы (2,3) — аналитические функции от $x_0, \dots, x_n$.

б) Функции $x_i = X_i(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ $(i = 0,\ 1,\ \dots,\ n)$ — аналитические функции своих аргументов.

Возможность выбора аналитических функций X_i связана с характером поверхности S и семейства линий l. Назовем поверхность S и семейство линий l, для которых это возможно, аналитической поверхностью и аналитическим семейством линий.

Если поверхность задана уравнением $F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$, то она будет аналитична в том случае, когда функция

---

*) Достаточно требовать, чтобы функции u_i имели непрерывные производные до порядка n_i включительно и функции, задающие преобразование координат, имели непрерывные производные до порядка $\max(n_i)$ включительно.

$F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — аналитическая функция своих аргументов, и поверхность не имеет особых точек (точек, где все первые производные функции F обращаются в нуль). Семейство нормалей к аналитической поверхности — аналитическое семейство линий.

в) Начальные данные — аналитические функции от $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Согласно теореме Ковалевской, мы можем сказать, что при выполнении условий а), б), в) обобщенная задача Коши имеет всегда единственное решение в некоторой окрестности поверхности S, если эта поверхность нигде не имеет характеристического направления.

Если же поверхность S имеет в некоторой точке A характеристическое направление, т. е. если в точке A поверхности

$$\xi_0(x_0, \ldots, x_n) = 0$$

имеет место равенство

$$\left| \sum_{k_0+\ldots+k_n=n_j} A_{ij}^{(k_0 \ldots k_n)} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0}\right)^{k_0} \cdots \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n}\right)^{k_n} \right| = 0, \qquad (11,3)$$

то на поверхности S, вообще говоря, нельзя уже задавать произвольные значения функций u_i и их производных, если хотеть, чтобы обобщенная задача Коши имела решение. Действительно, оставим тогда все члены, содержащие производные порядка n_i по ξ_0 от функций u_i в левых частях уравнений (7,3), а все остальные члены перенесем вправо. Тогда в силу условия (11,3) в точке A будет существовать линейная зависимость между левыми частями полученных уравнений. Значит, такая же линейная зависимость должна существовать и между правыми частями этих уравнений, которые вполне определяются заданными значениями функций u_i и их производных на поверхности S. А это налагает определенную зависимость на эти начальные данные, если только требуемая линейная зависимость между правыми частями уравнений не выполняется тождественно при всех значениях функций u_i и их производных на S. В этом последнем случае, а также в том случае, если на характеристической поверхности S условия Коши заданы так, что система имеет решение относительно старших производных по ξ_0, рассматриваемых как функции независимых переменных

$$\xi_0, \ldots, \xi_n, u_1, \ldots, u_N, \frac{\partial^k u_j}{\partial \xi_0^{k_0} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}$$

$$(k = \sum k_s \leqslant n_j, \; k_0 < n_j, \; j = 1, \ldots, N),$$

такое решение может быть неединственно в окрестности точки A.

Приведем ряд примеров на нахождение характеристических направлений для уравнений и систем уравнений. При этом мы всегда будем предполагать, что

$$\sum \alpha_i^2 = 1, \tag{12,3}$$

т. е. α_i означает косинус угла между осью Ox_i и нормалью к гиперплоскости, имеющей характеристическое направление.

Пример 1. Для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

соотношение (8,3) принимает вид

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 0.$$

Принимая во внимание (12,3), убеждаемся, что уравнение Лапласа не имеет действительных характеристических направлений.

Пример 2. Для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

соотношение (8,3) принимает вид

$$\alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = 0.$$

Так как согласно (12,3) должно быть

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1,$$

то $2\alpha_0^2 = 1$; $\alpha_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит, касательные плоскости ко всем характеристическим поверхностям составляют с осью Ox_0 угол в 45°. Пользуясь этим свойством характеристических поверхностей, легко сообразить, какой вид имеют характеристические поверхности, проходящие через некоторые кривые на плоскости $x_0 = \text{const}$. Например, характеристической поверхностью, проходящей через любую прямую l, лежащую в этой плоскости, служит плоскость, проходящая через l и составляющая с плоскостью $x_0 = \text{const}$ угол в 45°. Характеристической поверхностью, проходящей через какую-нибудь окружность K, лежащую в плоскости $x_0 = \text{const}$, служит боковая поверхность круглого конуса с осью, параллельной оси Ox_0, и образующими, составляющими угол в 45° с плоскостью $x_0 = \text{const}$, или, что все равно, с осью Ox_0.

Легко видеть, что для так называемого волнового уравнения в n-мерном пространстве

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

справедливы вполне аналогичные результаты.

Пример 3. Для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

соотношение (8,3) принимает вид

$$\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 0.$$

Согласно (12,3) отсюда следует, что $\alpha_0^2 = 1$. Поэтому характеристическими поверхностями служат гиперплоскости $x_0 = \text{const}$.

Пример 4. Для уравнения

$$a_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

соотношение (8,3) принимает вид

$$a_1(x_1, \ldots, x_n)\alpha_1 + a_2(x_1, \ldots, x_n)\alpha_2 + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\alpha_n = 0.$$

Поэтому все гиперплоскости, проходящие через точку $(x_1, \ldots, x_n)$ и через выходящий из этой точки вектор с компонентами $(a_1, \ldots, a_n)$, имеют в этой точке характеристическое направление.

Пример 5. Для системы уравнений с двумя независимыми переменными

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1, x_2)\frac{\partial u_j}{\partial x_1}+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_1, x_2)\frac{\partial u_j}{\partial x_2}+\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_1, x_2)u_j=0$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

соотношение (8,3) принимает вид

$$|\alpha_1 a_{ij}(x_1, x_2)+\alpha_2 b_{ij}(x_1, x_2)|=0.$$

Характеристическими линиями будут линии, вдоль которых $\frac{dx_2}{dx_1}$, т. е. $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}:\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$, равняется какому-нибудь корню k уравнения

$$|-ka_{ij}(x_1, x_2)+b_{ij}(x_1, x_2)|=0.$$

Мы считаем здесь, что $\varphi(x_1, x_2)=\text{const}$ есть уравнение характеристической линии.

Задача. Покажите, что при гладком невырожденном преобразовании координат характеристическая поверхность системы (2,3) переходит в характеристическую поверхность преобразованной системы, т. е. характеристики инвариантны относительно невырожденного преобразования координат.

4. Для нелинейных систем вида

$$\Phi_i\left(x_0, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_N, \ldots, \frac{\partial^k u_j}{\partial x_0^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}, \ldots\right)=0 \tag{13,3}$$
$$(i, j=1, \ldots, N;\ k=k_0+k_1+\ldots+k_n\leqslant n_i)$$

актеристическим уравнением называется уравнение

$$\left|\sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n=n_j}\frac{\partial\Phi_i}{\partial\left\{\frac{\partial^{n_j}u_j}{\partial x_0^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right\}}\alpha_0^{k_0}\ldots\alpha_n^{k_n}\right|=0. \tag{14,3}$$

Поверхность

$$\varphi(x_0, \ldots, x_n)=0 \tag{15,3}$$

называется *характеристической* для системы (13,3) и *данного решения* $u_1, u_2, \ldots, u_N$ этой системы, если на этой поверхности при рассматриваемых функциях $u_1, u_2, \ldots, u_N$ имеет место следующее тождество:

$$\left| \sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n=n_j} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \left\{ \dfrac{\partial^{n_j} u_j}{\partial x_0^{k_0} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right\}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \right)^{k_0} \ldots \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)^{k_n} \right| = 0.$$

Аналогично определяются *характеристические направления* для системы (13,3) в данной точке пространства $(x_0, \ldots, x_n)$ для данного решения $u_1, u_2, \ldots, u_N$. В случае нелинейных систем имеет смысл говорить о характеристическом направлении гиперплоскости

$$\sum \alpha_k (x_k - x_k^0) = 0$$

в данной точке только для *определенного решения* $u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_N$ системы (13,3), так как коэффициенты уравнения (14,3) зависят в этом случае, вообще говоря, от функций u_i и их производных до порядка n_i.

Аналогично тому, как это мы делали в предыдущем пункте, можно показать следующее. Пусть на некоторой аналитической поверхности заданы условия Коши, как это было сделано в предыдущем пункте, и предполагается, что все рассматриваемые там функции аналитичны. Так как рассматриваемая система теперь не предполагается линейной, то после перехода к координатам $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$, как это было сделано в предыдущем пункте, мы получим для $\dfrac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ нелинейную систему уравнений; обозначим ее через $\sum$. Эта система имеет, вообще говоря, не одно решение относительно $\dfrac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, рассматриваемых как функции от независимых переменных $\xi_0, \ldots, \xi_n, \ldots, u_j, \ldots, \dfrac{\partial^k u_j}{\partial \xi_0^{k_0} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}$, $k = \sum k_s \leqslant n_j$, $k_0 < n_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$. Допустим, что вблизи гиперповерхности $\xi_0 = 0$ и заданных на ней значений u_j и их производных мы выбрали для $\dfrac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ одну какую-нибудь систему аналитических функций от $\xi_0, \ldots, \xi_n, \ldots, u_j, \ldots, \dfrac{\partial^k u_j}{\partial \xi_0^{k_0} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}$, $k = \sum k_s \leqslant n_j$, $k_0 < n_j$

($j = 1, 2, \ldots, N$), удовлетворяющую уравнениям $\sum$. Таким образом мы определим значения $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ на поверхности S по заданным на ней начальным условиям обобщенной задачи Коши. Возвращаясь тогда к координатам $x_0, \ldots, x_n$, мы получим на поверхности S значения всех функций u_i и всех их производных по $x_0, \ldots, x_n$ до порядка n_i. Подставляя их вместо u_i и производных u_i в уравнение (14,3), мы получим вполне определенное уравнение для $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Следовательно, мы сможем таким образом определить характеристические направления в каждой точке $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ поверхности S. Допустим, что поверхность S нигде не имеет характеристического направления. Тогда можно доказать, что так поставленная обобщенная задача Коши для системы (13,3) имеет единственное аналитическое решение при сделанном выборе на S значений $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$.

§ 4. О единственности решения задачи Коши в области неаналитических функций

1. Из теоремы Ковалевской следуют существование и единственность решения задачи Коши в классе аналитических функций, если аналитические условия Коши задаются на аналитической поверхности S, нигде не имеющей характеристического направления. Из построений, приведенных в §§ 2 и 3, следует, что если все функции, входящие в данные уравнения и в начальные условия, принимают действительные значения при действительных значениях аргументов, то и решения задачи Коши действительны. Возникает вопрос: нет ли в этом случае других решений задачи Коши, кроме аналитического решения Ковалевской? Ведь для того, чтобы система функций $(u_1, \ldots, u_N)$ была решением задачи Коши в действительной области, нет надобности требовать, чтобы все функции u_i были аналитическими. Для этого вполне достаточно, чтобы они имели производные тех порядков, какие входят в рассматриваемые уравнения. Несмотря на усилия многих выдающихся математиков, этот вопрос до сих пор не решен полностью.