($j=1, 2, \ldots, N$), удовлетворяющую уравнениям $\sum$. Таким образом мы определим значения $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ на поверхности S по заданным на ней начальным условиям обобщенной задачи Коши. Возвращаясь тогда к координатам $x_0, \ldots, x_n$, мы получим на поверхности S значения всех функций u_i и всех их производных по $x_0, \ldots, x_n$ до порядка n_i. Подставляя их вместо u_i и производных u_i в уравнение (14,3), мы получим вполне определенное уравнение для $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Следовательно, мы сможем таким образом определить характеристические направления в каждой точке $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ поверхности S. Допустим, что поверхность S нигде не имеет характеристического направления. Тогда можно доказать, что так поставленная обобщенная задача Коши для системы (13,3) имеет единственное аналитическое решение при сделанном выборе на S значений $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$.

§ 4. О единственности решения задачи Коши в области неаналитических функций

1. Из теоремы Ковалевской следуют существование и единственность решения задачи Коши в классе аналитических функций, если аналитические условия Коши задаются на аналитической поверхности S, нигде не имеющей характеристического направления. Из построений, приведенных в §§ 2 и 3, следует, что если все функции, входящие в данные уравнения и в начальные условия, принимают действительные значения при действительных значениях аргументов, то и решения задачи Коши действительны. Возникает вопрос: нет ли в этом случае других решений задачи Коши, кроме аналитического решения Ковалевской? Ведь для того, чтобы система функций $(u_1, \ldots, u_N)$ была решением задачи Коши в действительной области, нет надобности требовать, чтобы все функции u_i были аналитическими. Для этого вполне достаточно, чтобы они имели производные тех порядков, какие входят в рассматриваемые уравнения. Несмотря на усилия многих выдающихся математиков, этот вопрос до сих пор не решен полностью.

Еще в 1901 г. Гольмгрен доказал единственность решения задачи Коши с начальными условиями (10,3) для линейных систем уравнений вида (9,3) с аналитическими коэффициентами в классе функций, имеющих непрерывные производные всех тех порядков, которые входят в рассматриваемую систему.

Приведем доказательство этой теоремы.

Для простоты изложения будем предполагать, что число независимых переменных равно двум, хотя то же доказательство по существу применимо при любом числе независимых переменных. Предположим также, что рассматриваемая система — первого порядка. Согласно сказанному в § 2 общий случай приводится к этому. Обозначим независимые переменные через $\breve{x}$ и y и предположим сначала, что задача Коши ставится для отрезка прямой $\breve{x}=0$, содержащего начало координат.

Итак, пусть дана система уравнений

$$\frac{\partial z_i}{\partial \breve{x}}=\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(\breve{x},\, y)\frac{\partial z_j}{\partial y}+\sum_{j=1}^{n} B_{ij}(\breve{x},\, y)\, z_j+C_i(\breve{x},\, y) \tag{1,4}$$

$$(i=1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

и начальные условия

$$z_i(0,\, y)=\varphi_i(y). \tag{2,4}$$

A_{ij}, B_{ij}, C_i — аналитические функции своих аргументов в некоторой окрестности начала координат. Пусть вблизи начала координат даны два решения системы (1,4), удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям (2,4) и состоящие из функций $z_1, \ldots, z_n$ (первое решение) и $\breve{z}_1, \ldots, \breve{z}_n$ (второе решение), обладающих непрерывными частными производными первого порядка. Надо доказать, что эти решения совпадают в некоторой окрестности начала координат.

Положим

$$z_i-\breve{z}_i=\breve{u}_i \quad (i=1,\, 2,\, \ldots,\, n).$$

Тогда все $\breve{u}_i$ являются вблизи O непрерывно дифференцируемыми функциями, удовлетворяющими уравнениям

$$\frac{\partial \breve{u}_i}{\partial \breve{x}} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(\breve{x}, y) \frac{\partial \breve{u}_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(\breve{x}, y) \breve{u}_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и начальным условиям

$$\breve{u}_i(0, y) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Докажем, что все $\breve{u}_i \equiv 0$ вблизи точки O (0, 0). Введем вместо $\breve{x}$ новую независимую переменную

$$x = \breve{x} + y^2$$

и положим

$$u_i(x, y) = \breve{u}_i(\breve{x}, y) = \breve{u}_i(x - y^2, y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда функции u_i будут удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = 2y \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x - y^2, y) \frac{\partial u_j}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x - y^2, y) \frac{\partial u_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(x - y^2, y) u_j \qquad (3,4)$$

или, после разрешения относительно производных по x и введения новых обозначений,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x, y) \frac{\partial u_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x, y) u_j \qquad (4,4)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

(Возможность разрешения системы (3,4) относительно указанных производных следует из необращения в нуль определителя системы вблизи начала координат O плоскости (x, y); проверьте!.) Коэффициенты a_{ij} и b_{ij} аналитичны вблизи точки O. Функции u_i вблизи O непрерывно дифференцируемы и обращаются в нуль на параболе $y^2 = x$. Мы докажем, что все $u_i \equiv 0$ вблизи O при $x > y^2$. Тем самым будет показано, что все $\breve{u}_i \equiv 0$ вблизи O при $\breve{x} > 0$. Случай $\breve{x} < 0$ сводится к случаю $\breve{x} > 0$ заменой $\breve{x}$ на $-\breve{x}$.

Проведем прямую $x = a$ ($a > 0$; рис. 1) и обозначим буквой H_a область, ограниченную отрезком l_a этой прямой и частью K_a параболы $y^2 = x$. Если a достаточно мало, то все функции u_i непрерывны вместе с их частными производными первого порядка вплоть до границы H_a (мы говорим, что функция, заданная в области H, непрерывна вплоть до границы H^* этой области, если эту функцию можно продолжить на H^* так, что полученная функция будет непрерывной в $H + H^*$).

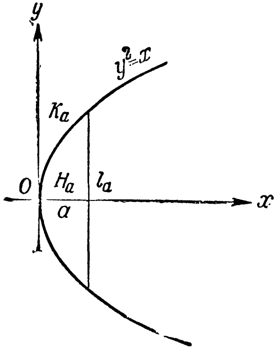

Рис. 1.

Обозначим для краткости

$$F_i(u) \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial y} - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$G_i(v) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial v_i}{\partial x} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y}(a_{ji} v_j) + \sum_{j=1}^{n} b_{ji} v_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть в H_a заданы две системы функций u_i и v_i, непрерывных вплоть до границы H_a вместе с их первыми частными производными. Тогда интегрирование по частям дает

$$\iint_{H_a} \left\{ \sum_{i=1}^{n} [v_i F_i(u) + u_i G_i(v)] \right\} dx\, dy =$$

$$= \iint_{H_a} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial (u_i v_i)}{\partial x} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (a_{ij} u_j v_i)}{\partial y} \right] \right\} dx\, dy =$$

$$= \int_{l_a} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i dy + \int_{K_a} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i dy + \int_{K_a} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j v_i dx, \quad (5,4)$$

где контур, ограничивающий H_a (т. е. $K_a + l_a$), проходится в положительном направлении. Если, в частности, u_i есть определенная выше система решений уравнений (4,4), а система функций $v_1, \ldots, v_n$ удовлетворяет уравнениям

$$G_i(v) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{6,4}$$

то из (5,4) получится

$$\int\limits_{l_a} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i dy = 0. \tag{7,4}$$

Для дальнейшего обратимся к доказательству теоремы Ковалевской для системы линейных уравнений. Воспользуемся замечаниями 1 и 2 к § 2 и будем решать систему уравнений (6,4) вблизи точки $(a, 0)$, задавая в качестве начальных данных на l_a всевозможные системы многочленов. Так как за постоянную M мы можем взять постоянную M^*, определенную в замечании 1 к § 2 и общую для всех точек $(a, 0)$, то в силу замечания 2 к § 2 мы можем утверждать, что если a достаточно мало, то все функции, составляющие решение системы (6,4) при таких начальных условиях, будут заведомо определены и аналитичны в H_a и, следовательно, непрерывны вплоть до границы H_a вместе с их частными производными.

Итак, равенство (7,4) справедливо, если $0 < a < a_0$ (a_0 — некоторое фиксированное положительное числое), а все v_i являются любыми многочленами. Возьмем любо такое a и пусть длина отрезка l_a равна s_a. По известной теореме Вейерштрасса, для любого $\varepsilon > 0$ найдется система таких многочленов v_i $(i = 1, \ldots, n)$, что всюду на l_a будет

$$|u_i - v_i| < \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{8,4}$$

В силу формул (7,4) и (8,4)

$$\int\limits_{a} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \, dy =$$

$$= \int\limits_{l_a} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i dy + \int\limits_{l_a} \sum_{i=1}^{n} u_i (u_i - v_i) \, dy \leqslant \varepsilon s_a \sum_{i=1}^{n} \max_{l_a} |u_i|,$$

откуда в силу произвольности ε получаем

$$\int\limits_{l_a} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \, dy = 0,$$

т. е. все $u_i \equiv 0$ на l_a, если только $0 < a < a_0$. Этим теорема Гольмгрена доказана.

При помощи этой теоремы и замены независимых переменных нетрудно доказать теорему о единственности решения обобщенной задачи Коши при прежних предположениях о системе (1,4), когда начальные данные задаются на аналитической линии, нигде не имеющей характеристического направления. Аналогичная теорема справедлива также для линейных систем с большим числом независимых переменных, когда начальные данные задаются на аналитической поверхности S. При этом нужно только, чтобы эта поверхность S нигде не имела характеристического направления. От функций, составляющих решение, можно требовать, чтобы они были заданы только по одну сторону от S и были непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка вплоть до S. Если при этих условиях два решения совпадают на S, то они совпадают и в некоторой окрестности S.

Замечание. Можно точнее описать ту область на плоскости $(\tilde{x}, y)$, где решение задачи Коши для системы (1,4) единственным образом определяется начальными данными (область единственности). Пусть эти начальные данные заданы на отрезке AB оси $\tilde{x} = 0$, а решения рассматриваются вправо от этой оси. Проведем через точки A и B вправо характеристики, ближайшие к отрезку AB. Тогда можно показать, что областью единственности решения задачи Коши будет область, ограниченная отрезком AB и этими двумя характеристиками. Аналогично определяется область единственности при большем числе независимых переменных (ср. § 10 и § 12, где задача Коши решается для гиперболических уравнений).

2. Вскоре после доказательства теоремы Гольмгрена Адамар показал, что вопрос о единственности вблизи S решения задачи Коши для нелинейных уравнений легко сводится к вопросу о единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с достаточно гладкими, но не обязательно аналитическими коэффициентами. Поэтому все дальнейшие усилия были сосредоточены на решении этого последнего вопроса. В 1938 г. Карлеман решил его для систем уравнений с частными производными по двум независимым переменным. Теорема Карлемана состоит в следующем.

Пусть дана система уравнений:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x,\ y)\frac{\partial z_j}{\partial y}+\sum_{j=1}^{n} B_{ij}(x,\ y)\,z_j=0$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (9,4)$$

Функции A_{ij}, B_{ij} заданы в некоторой замкнутой области $\overline{G}$ полуплоскости $x \geqslant 0$, примыкающей к отрезку $|y| \leqslant a$ оси ординат; A_{ij} имеют в $\overline{G}$ ограниченные производные до второго порядка включительно; B_{ij} ограничены в $\overline{G}$.

Тогда решение системы (9,4) в $\overline{G}$, удовлетворяющее условиям

$$z_i(0,\ y)=0 \text{ при } |y| \leqslant a \quad (i=1,\ \ldots,\ n)$$

и имеющее непрерывные первые производные по x и y, тождественно равно нулю в некоторой части $\overline{G}'$ области $\overline{G}$, примыкающей к отрезку $|y| \leqslant a$. При этом предполагается, что в каждой точке $\overline{G}$ все корни определителя

$$|A_{ij}-\lambda\delta_{ij}|\ ^{*})$$

различны между собой, т. е. что ни в одной точке этой области $\overline{G}$ нет совпавших характеристических направлений.

Аналогичный результат для систем со многими независимыми переменными получен недавно Кальдероном **).

При совпадении характеристических направлений единственность решения задачи Коши может нарушиться; это впервые показал А. Д. Мышкис (1947). Он привел пример системы

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=a_1(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}+b_1(x,\ y)\frac{\partial v}{\partial y},\\ \frac{\partial v}{\partial x}&=a_2(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}+b_2(x,\ y)\frac{\partial v}{\partial y},\end{aligned} \qquad (10,4)$$

которая имеет решение u_0, v_0 такое, что функции u_0 и v_0 обладают непрерывными частными производными всех порядков, равны нулю на прямой $x=0$, но отличны от нуля

*) $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$

**) Calderon, American Journal of Mathematics 80, № 1 (1958), 16—36.

в любой близости от начала координат. При этом коэффициенты системы определены и дифференцируемы на всей плоскости, их производные терпят разрыв при $x=0$ и на этой же прямой совпадают корни характеристического уравнения *).

В 1954 г. Плись построил новый пример системы вида (10,4), которая обладает нетривиальным решением задачи Коши с нулевыми начальными условиями при $x=0$, причем коэффициенты системы имеют непрерывные частные производные любого порядка на всей плоскости **).

Единственность решения задачи Коши в классе достаточно гладких функций доказана для гиперболических уравнений и гиперболических систем с произвольным числом независимых переменных (о таких системах речь будет идти позже), а также для широкого класса эллиптических (см. § 5) уравнений и систем; последнему вопросу посвящена обширная литература.

Интересующий нас вопрос о единственности решения задачи Коши в области неаналитических, но достаточно гладких функций связан с вопросом о том, единственным ли способом можно продолжить достаточно гладкое действительное решение $(u_1, \ldots, u_N)$ системы (13,3) предыдущего параграфа, заданное в некоторой действительной области пространства $(x_0, \ldots, x_n)$ по одну сторону и на самой достаточно гладкой поверхности S, нигде не имеющей характеристического направления. Действительно, задание функций u_i по одну сторону поверхности S и на самой этой поверхности определяет значения на этой поверхности самих функций u_i и их производных, входящих в условия Коши. Таким образом, вопрос о продолжении функций u_i за поверхность S сводится к нахождению решения обобщенной задачи Коши в области, лежащей по другую сторону поверхности S. Как сказано выше, вопрос о единственности этого решения не выяснен до сих пор полностью.

Точно так же до сих пор остается нерешенным полностью вопрос о том, можно ли разными способами продолжить достаточно гладкое действительное решение $(u_1, \ldots, u_N)$ системы (13,3), заданное в некоторой действительной области пространства $(x_0, \ldots, x_n)$, лежащей по одну сторону доста-

*) См. А. Д. Мышкис, УМН 3:2 (1948), стр. 3—46.
**) Pliś, Bull. Acad. Polon. Sci. 2 (1954), 55—57.

точно гладкой поверхности S и на самой этой поверхности, и в том случае, если поверхность S является характеристической для данной системы и данного решения. Для всех уравнений, которые мы будем рассматривать, такое продолжение всегда возможно очень многими способами.

Вопрос о неединственности продолжения решения системы (13,3) за характеристику эквивалентен вопросу о существовании многих решений обобщенной задачи Коши, если условия Коши, заданные на характеристике, таковы, что они вообще допускают хотя бы одно такое решение. Мы видели, что для этого заданные на характеристике функции u_i и их производные должны, вообще говоря, удовлетворять некоторым соотношениям. Эти условия заведомо выполняются, если существуют функции $u_1, \ldots, u_N$, удовлетворяющие заданным уравнениям по одну какую-либо сторону характеристики.

Если интересоваться только аналитическими решениями, то вопрос о единственности продолжения за характеристику, как вообще за любую поверхность, заданного в $(n+1)$-мерной области решения всегда решается в том смысле, что такое продолжение единственно, так как аналитическая функция $n+1$ независимых переменных вполне определяется своими значениями в как угодно малой области $(n+1)$-го измерения.

3. В п. 3 § 3 мы видели, что если поверхность S, на которой задаются условия Коши, нигде не имеет характеристического направления, то эти условия Коши вместе с уравнениями системы (7,3) единственным образом определяют на S значения всех функций u_i и всех их производных до порядка n_i. Если же поверхность S вблизи точки A является характеристической, то условия Коши, заданные на ней, допускают различные системы значений $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$, которые могут удовлетворять системе (7,3), если они допускают хотя бы одну такую систему значений $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ (мы приняли здесь, что уравнением поверхности S служит уравнение $\xi_0 = 0$). Поэтому могут существовать такие функции, которые удовлетворяют уравнениям (7,3) всюду в некоторой области, внутри которой находится кусок характеристической поверхности, причем производные $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ на этой поверхности имеют разрыв первого рода. При подходе к S с разных сторон эти производные приближаются к разным значениям, которые удовлетворяют одновременно уравнениям (7,3) на поверхности S. Если бы поверхность S не была характеристической, то производные $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ не могли бы иметь на ней разрывов первого рода при непрерывности коэффициентов уравнений (7,3) и непрерывности всех других производных от функций u_i вида

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial \xi_0^{k_0} \partial \xi_1^{k_1} \dots \partial \xi_n^{k_n}},$$

$$k_0 + k_1 + \dots + k_n = k \leqslant n_i, \quad k_0 < n_i.$$

Аналогичные утверждения справедливы и для нелинейных систем.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = 0, \tag{11,4}$$

для которого характеристиками служат линии

$$x = \text{const}, \quad y = \text{const}.$$

Очевидно, уравнению (11,4) удовлетворяет всякая функция вида

$$u = f(y),$$

где $f(y)$ — любая функция, имеющая всюду производную. В частности, можно предположить, что функция $u = f(y)$ такова, что ее вторая производная непрерывна всюду, за исключением одной точки, где она имеет разрыв первого рода. Тогда мы получим решение уравнения (11,4), у которого вторые частные производные имеют разрыв первого рода на характеристике.

Все дальнейшее будет посвящено главным образом уравнениям двух типов: или будет рассматриваться одно уравнение *второго* порядка с одной неизвестной функцией или будет рассматриваться система любого порядка с любым числом неизвестных функций, но с частными производными только по *двум* независимым переменным. Такие уравнения приводятся к некоторому простому «каноническому» виду. Это приведение описано в следующих трех параграфах.

§ 5. Приведение к каноническому виду в точке и классификация уравнений второго порядка с одной неизвестной функцией

1. Рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \\ + C(x_1, \ldots, x_n)u + F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (1,5)$$

с одной неизвестной функцией u. Мы считаем здесь $A_{ij} = A_{ji}$. Все функции A_{ij}, B_i, C, F действительны, они определены в некоторой области G пространства $(x_1, \ldots, x_n)$.

Сделаем замену независимых переменных, положив

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2,5)$$

где a_{ki} — некоторые постоянные. Мы предполагаем, что преобразование (2,5) неособое, т. е. что определитель $|a_{kl}|$ не равен нулю. Тогда преобразование от x_k к ξ_k в обе стороны однозначно. Уравнение (1,5) в независимых переменных ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$ запишется так:

$$\sum_{k,l=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}a_{ki}a_{lj}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \ldots = 0^{*)}. \qquad (3,5)$$

Мы выписали здесь только члены с производными второго порядка от неизвестной функции u. Из равенства (3,5) видно, что коэффициенты при производных второго порядка от u

---

*) Чтобы быть уверенными в законности перехода от производных по независимым переменным x_i $(i = 1, \ldots, n)$ к производным по независимым переменным ξ_i $(i = 1, \ldots, n)$ по обычным правилам, достаточно предположить, что функция u имеет непрерывные производные до второго порядка включительно.