лом неизвестных функций, но с частными производными только по *двум* независимым переменным. Такие уравнения приводятся к некоторому простому «каноническому» виду. Это приведение описано в следующих трех параграфах.

§ 5. Приведение к каноническому виду в точке и классификация уравнений второго порядка с одной неизвестной функцией

1. Рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \\ + C(x_1, \ldots, x_n)u + F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (1,5)$$

с одной неизвестной функцией u. Мы считаем здесь $A_{ij} = A_{ji}$. Все функции A_{ij}, B_i, C, F действительны, они определены в некоторой области G пространства $(x_1, \ldots, x_n)$.

Сделаем замену независимых переменных, положив

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2,5)$$

где a_{ki} — некоторые постоянные. Мы предполагаем, что преобразование (2,5) неособое, т. е. что определитель $|a_{kl}|$ не равен нулю. Тогда преобразование от x_k к ξ_k в обе стороны однозначно. Уравнение (1,5) в независимых переменных ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$ запишется так:

$$\sum_{k,l=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}a_{ki}a_{lj}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \ldots = 0^{*}). \qquad (3,5)$$

Мы выписали здесь только члены с производными второго порядка от неизвестной функции u. Из равенства (3,5) видно, что коэффициенты при производных второго порядка от u

*) Чтобы быть уверенными в законности перехода от производных по независимым переменным x_i $(i = 1, \ldots, n)$ к производным по независимым переменным ξ_i $(i = 1, \ldots, n)$ по обычным правилам, достаточно предположить, что функция u имеет непрерывные производные до второго порядка включительно.

при замене независимых переменных заданной формулой (2,5), изменяются совершенно так же, как изменяются коэффициенты квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j \tag{4,5}$$

при замене x_k на ξ_k, даваемой формулами

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \xi_i \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{5,5}$$

Коэффициенты A_{ij} формулы (4,5) мы считаем постоянными и равными значениям коэффициентов $A_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (1,5) в какой-нибудь точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ области G.

В алгебре доказывается существование такого действительного неособого преобразования (5,5), которое приводит всякую форму (4,5) с действительными коэффициентами A_{ij} к виду

$$\sum_{i=1}^{m} \pm \xi_i^2, \text{ где } m \leqslant n. \tag{6,5}$$

Существует много неособых действительных преобразований (5,5), приводящих форму (4,5) к виду (6,5), но число членов с положительными и число членов с отрицательными знаками в форме (6,5) определяется исключительно формой (4,5) и не зависит от выбора неособого преобразования (5,5). (Закон инерции квадратичных форм *).)

Определитель $|A_{ik} - \lambda\delta_{ik}|$ будет иметь только действительные корни λ. Число членов в (6,5) с положительными знаками и число членов с отрицательными знаками равно числу положительных и соответственно числу отрицательных корней λ этого определителя.

Если мы найдем некоторое преобразование (5,5), приводящее форму (4,5) к виду (6,5), то преобразование (2,5) с матрицей, транспонированной и обратной к (a_{ik}), приведет

*) См. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Физматгиз, 1959, § 27; И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, Гостехиздат, 1951, стр. 143.

уравнение (1,5) к виду

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^{*}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \ldots = 0, \qquad (7,5)$$

где

$$A_{ii}^{*}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \pm 1, \text{ если } i = j \leqslant m,$$

$$A_{ij}^{*}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0, \text{ если } i \neq j \text{ или если } i = j > m.$$

Мы выписали здесь только члены со старшими производными от функции u. Вид (7,5) уравнения (1,5) называется его *каноническим видом в точке* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Таким образом, для каждой точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ области G можно указать такое неособое преобразование (2,5) независимых переменных, которое приводит уравнение (1,5) к каноническому виду в этой точке.

Для каждой точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ имеется, вообще говоря, свое преобразование (2,5), приводящее уравнение (1,5) к каноническому виду в этой точке; в других точках это преобразование может не приводить уравнение к каноническому виду. Примеры показывают, что, когда число независимых переменных больше двух, вообще говоря, нельзя указать не только линейного преобразования независимых переменных с постоянными коэффициентами, но и никакого другого неособого преобразования переменных, которое приводило бы данное линейное уравнение второго порядка к каноническому виду даже в *как угодно малой области*. В случае же двух независимых переменных такое преобразование существует при весьма общих предположениях о коэффициентах уравнения (1,5), как будет показано в следующем параграфе.

Классификация уравнений второго порядка основана на возможности приведения уравнения (1,5) к каноническому виду в точке.

2. Уравнение (1,5) называется *эллиптическим* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в уравнении (7,5) все $A_{ii}^{*}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ $(i = 1, \ldots, n)$ отличны от нуля и имеют один знак.

Уравнение (1,5) называется *гиперболическим* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в уравнении (7,5) все $A_{ii}^{*}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ имеют один и тот же знак, за исключением одного A_{ii}^{*}, которое имеет противоположный знак, причем $m = n$.

Уравнение (1,5) называется *ультрагиперболическим* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в уравнении (7,5) имеется больше одного положительного $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и больше одного отрицательного $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и $m = n$.

Уравнение (1,5) называется *параболическим в широком смысле* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если среди $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ имеются равные нулю, т. е. если $m < n$.

Уравнение (1,5) называется *параболическим в узком смысле* или просто *параболическим* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если только один из коэффициентов $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (пусть это будет A_{11}^*) равен нулю, все же другие $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ имеют одинаковые знаки, а коэффициент при $\frac{\partial u}{\partial \xi_1}$ отличен от нуля.

Уравнение (1,5) называется *эллиптическим*, соответственно *гиперболическим*, *ультрагиперболическим* и т. д. *во всей области* G, если оно эллиптично, соответственно гиперболично, ультрагиперболично и т. д. в каждой точке области G.

В приложениях иногда встречаются уравнения, которые в одной части G_1 рассматриваемой области G являются эллиптическими, в другой части G_2 области G гиперболическими. Такие уравнения называются уравнениями смешанного типа. К ним принадлежит, например, уравнение Трикоми

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в области G, содержащей точки оси x *).

3. Нелинейное уравнение второго порядка

$$\Phi\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots\right) = 0$$

с одной неизвестной функцией u называется *для данного решения* $u^*(x_1, \ldots, x_n)$ эллиптическим, гиперболическим или

---

*) Уравнения смешанного типа впервые были исследованы Трикоми (см. его книгу в русском переводе «О линейных уравнениях смешанного типа», М.—Л., Гостехиздат, 1947). Интерес к таким уравнениям особенно возрос после того, как обнаружилась их связь с задачами газовой динамики (см. Ф. И. Франкль, Изв. АН СССР, серия матем. 9 (1945), 121—143). В последнее время изучению уравнений смешанного типа посвящено много работ (см. А. В. Бицадзе, Уравнения смешанного типа, Издательство АН СССР, 1959, где приведена подробная библиография вопроса).

параболическим в широком смысле в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, соответственно в области G, если эллиптично, гиперболично, параболично в широком смысле в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, соответственно в области G, уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

где

$$A_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial \Phi}{\partial \left\{ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\}}. \tag{8,5}$$

В правой части (8,5) вместо функции u и ее производных подставлена функция $u^*(x_1, \ldots, x_n)$ и ее соответствующие производные.

Мы будем в дальнейшем изучать только линейные уравнения второго порядка с одной неизвестной функцией, которые во всей рассматриваемой области являются или эллиптическими, или гиперболическими, или параболическими. Уравнениями же ультрагиперболическими мы не будем заниматься; такие уравнения не встречаются ни в физике, ни в технике. Точно так же мы не будем заниматься уравнениями параболическими в широком, но не в узком смысле. Соответственно этому, говоря в главе 4 о параболических уравнениях, мы будем иметь в виду только уравнения параболические в узком смысле.

§ 6. Приведение к каноническому виду уравнения с частными производными второго порядка по двум независимым переменным в окрестности точки

1. Пусть дано уравнение

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0\ ^{*)}, \tag{1,6}$$

где коэффициенты A, B, C суть функции от x и y, имеющие непрерывные производные до второго порядка включи-

*) Мы рассматриваем в этом параграфе уравнения несколько более общего вида, чем линейные, так как все те рассуждения, какими приводится к каноническому виду линейное уравнение, одинаково применимы и для таких уравнений.