параболическим в широком смысле в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, соответственно в области G, если эллиптично, гиперболично, параболично в широком смысле в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, соответственно в области G, уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

где

$$A_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial \Phi}{\partial \left\{ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\}}. \tag{8,5}$$

В правой части (8,5) вместо функции u и ее производных подставлена функция $u^*(x_1, \ldots, x_n)$ и ее соответствующие производные.

Мы будем в дальнейшем изучать только линейные уравнения второго порядка с одной неизвестной функцией, которые во всей рассматриваемой области являются или эллиптическими, или гиперболическими, или параболическими. Уравнениями же ультрагиперболическими мы не будем заниматься; такие уравнения не встречаются ни в физике, ни в технике. Точно так же мы не будем заниматься уравнениями параболическими в широком; но не в узком смысле. Соответственно этому, говоря в главе 4 о параболических уравнениях, мы будем иметь в виду только уравнения параболические в узком смысле.

§ 6. Приведение к каноническому виду уравнения с частными производными второго порядка по двум независимым переменным в окрестности точки

1. Пусть дано уравнение

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0\ ^{*)}, \tag{1,6}$$

где коэффициенты A, B, C суть функции от x и y, имеющие непрерывные производные до второго порядка включи-

---

*) Мы рассматриваем в этом параграфе уравнения несколько более общего вида, чем линейные, так как все те рассуждения, какими приводится к каноническому виду линейное уравнение, одинаково применимы и для таких уравнений.

тельно. Мы будем предполагать, что A, B и C не обращаются одновременно в нуль и что функция $u(x, y)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно. Перейдем от независимых переменных x и y к независимым переменным ξ и η. Пусть

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \tag{2,6}$$

— дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем якобиан

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

нигде в рассматриваемой области не обращается в нуль. Тогда систему (2,6) можно однозначно разрешить относительно x и y в некоторой области на плоскости (ξ, η). Полученные функции $x(\xi, \eta)$ и $y(\xi, \eta)$ будут также дважды непрерывно дифференцируемыми функциями от ξ и η. В новых независимых переменных ξ и η уравнение (1,6) запишется так:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left[A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right] + \\ &\quad + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\left[A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + B\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} + C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right] + \\ &\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\left[A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right] + \\ &\qquad\qquad + F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0. \end{aligned} \tag{3,6}$$

Покажем, что в некоторой окрестности G фиксированной точки (x_0, y_0) функции $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ можно выбрать таким образом, чтобы уравнение (3,6) в каждой точке этой окрестности имело канонический вид. Нам придется отдельно исследовать случаи, когда в рассматриваемой точке $B^2 > AC$, $B^2 < AC$ или когда в некоторой окрестности этой точки $B^2 \equiv AC$. Случаев, когда в любой окрестности рассматриваемой точки выражение $B^2 - AC$ меняет знак или обращается в нуль не тождественно, мы не будем рассматривать.

2. Рассмотрим сначала случай, когда во всей рассматриваемой области $B^2 > AC$, т. е. когда уравнение (1,6) гиперболично (ср. определение гиперболичности в предыдущем параграфе). Мы можем считать, что в точке (x_0, y_0), в окрестности которой мы будем приводить уравнение (1,6) к каноническому виду, либо $A \neq 0$, либо $C \neq 0$. В противном случае мы могли бы достигнуть этого заменой переменных

$$x = x' + y',$$
$$y = x' - y'.$$

Рассмотрим уравнение

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{4,6}$$

Пусть $A \neq 0$. Так как $B^2 - AC > 0$, то уравнение (4,6) можно записать в виде

$$\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \left(-B - \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] \times$$
$$\times \left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \left(-B + \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] = 0,$$

и поэтому уравнению (4,6) удовлетворяют решения каждого из уравнений

$$\left.\begin{aligned} A\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} &= \left(-B - \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}, \\ A\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} &= \left(-B + \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{5,6}$$

Определим функции $\varphi_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ как решения уравнений (5,6), задавая их значения соответственно на некоторых линиях l_i $(i = 1, 2)$, проходящих через точку (x_0, y_0) и нигде не касающихся характеристик соответствующего уравнения *). Если линии l_i и заданные на них значения функций φ_i выбрать достаточно гладкими, то мы получим решения $\varphi_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$, имеющие непрерывные производные по x и y до второго порядка включительно. Если предположить

*) См. § 53 моих «Лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений» изд. 1952 г. Обращаю внимание на то, что в случае двух независимых переменных то определение характеристик, которое мы ввели в § 3 настоящей книги, совпадает с определением характеристик, данным в § 53 моих «Лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений». В случае же большего числа независимых переменных эти определения совершенно различны.

еще, что начальные значения $\varphi_i(x, y)$ на l_i выбраны так, что производная φ_i по направлению l_i не обращается в нуль в точке (x_0, y_0), то в этой точке не могут быть равными нулю одновременно обе частные производные функции $\varphi_i(x, y)$ по x и y (в противном случае равнялась бы нулю производная в этой точке по любому направлению).

Так как $A \neq 0$, то из уравнений (5,6) следует, что при этом $\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \neq 0$ и $\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \neq 0$ в окрестности точки (x_0, y_0) и что

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} : \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A};$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} : \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

В силу условия $B^2 - AC \neq 0$ имеем:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} : \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \neq \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} : \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}.$$

Отсюда следует, что якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{6,6}$$

отличен от нуля в некоторой окрестности G точки (x_0, y_0). Поэтому в этой окрестности мы можем принять в равенствах (2,6)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) = \varphi_1(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y) = \varphi_2(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{7,6}$$

Тогда в левой части (3,6) исчезнут члены, содержащие $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$. Коэффициент при $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}$ будет при этом *отличным от нуля* во всей рассматриваемой области G; в противном случае при переходе от координат (x, y) к координатам (ξ, η) порядок уравнения понизился бы; следовательно, при обратном переходе от координат (ξ, η) к координатам (x, y) порядок уравнения в некоторой точке области повысился бы, чего, очевидно, быть не может.

Разделив на коэффициент при $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta}$ уравнение (3,6), мы приведем его к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{8,6}$$

в окрестности G точки (x_0, y_0). Этот вид уравнения также называется каноническим.

Положив $\xi = \alpha + \beta$ и $\eta = \alpha - \beta$, приведем уравнение (8,6) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right). \tag{9,6}$$

После приведения гиперболического уравнения к каноническому виду (8,6) иногда удается проинтегрировать его в замкнутом виде, т. е. найти формулу, дающую все решения этого уравнения.

Пример 1. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{10,6}$$

заменой независимых переменных

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad y = \frac{\xi - \eta}{2}$$

приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0. \tag{11,6}$$

Обозначив $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ через v, получим $\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$, откуда $v = f(\eta)$, где f — произвольная функция η. Рассматривая в уравнении

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta)$$

ξ как параметр и интегрируя это уравнение, получим:

$$u = \int f(\eta)\, d\eta + C(\xi)$$

или

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x + y) + \psi(x - y), \tag{12,6}$$

где φ и ψ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Пример 2. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=\frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta}\qquad(\xi\neq 0)\tag{13,6}$$

после замены

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=v$$

обращается в уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial\xi}=\frac{1}{2\xi}v.$$

Это уравнение легко интегрируется методом разделения переменных. Так как η входит в v в качестве параметра, то постоянная интеграции будет функцией этого параметра. Получим:

$$\ln|v|=\frac{1}{2}\ln|\xi|+\ln|C(\eta)|$$

или

$$v=\frac{\partial u}{\partial\eta}=C(\eta)\sqrt{|\xi|}.$$

Отсюда

$$u=C_1(\eta)\sqrt{|\xi|}+C_2(\xi).$$

Здесь

$$C_1(\eta)=\int C(\eta)\,d\eta$$

есть произвольная (в силу произвольности $C(\eta)$) дифференцируемая функция от η, а $C_2(\xi)$ есть произвольная функция от ξ.

3. Если

$$B^2=AC$$

во всей рассматриваемой области, то уравнение (1,6) будет параболическим в этой области (ср. определение параболичности в предыдущем параграфе). Мы предполагаем, что в рассматриваемой области коэффициенты A, B, C уравнения (1,6) не обращаются одновременно в нуль. В силу условия $B^2=AC$ из этого предположения следует, что в каждой точке этой области один из коэффициентов A и C отличен от нуля. Пусть, например, $A\neq 0$ в рассматриваемой точке (x_0, y_0). Тогда оба уравнения (5,6) совпадают и обращаются в уравнение

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \tag{14,6}$$

Всякое решение уравнения (14,6) в силу условия $B^2=AC$ удовлетворяет также уравнению

$$B\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \tag{15,6}$$

Мы можем, как и в предыдущем пункте, определить такое решение $\varphi(x, y)$ уравнения (14,6), что функция $\varphi(x, y)$ имеет непрерывные производные второго порядка и ее первые производные не обращаются в нуль одновременно в некоторой окрестности G точки (x_0, y_0). Мы можем считать, что $A\neq 0$ во всей области G.

Пусть

$$\psi(x, y)=\mathrm{const}$$

есть такое семейство кривых в области G, что функция $\psi(x, y)$ имеет непрерывные производные второго порядка и якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{16,6}$$

нигде в области G не обращается в нуль. (Так как в G $A\neq 0$ и, следовательно, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}\neq 0$, то можно принять, например, $\psi(x, y)\equiv x$.) Положим в формулах (2,6)

$$\xi=\varphi(x, y) \quad \text{и} \quad \eta=\psi(x, y).$$

Тогда коэффициент при $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$ в уравнении (3,6) обращается в нуль. Коэффициент при $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}$ станет равным

$$\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}+\left(B\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Согласно (14,6) и (15,6) он также будет тождественно равен нулю в области G.

Коэффициент при $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ в уравнении (3,6) примет вид

$$A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{A}\left(A\frac{\partial\psi}{\partial x}+B\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2.$$

Это выражение не может обратиться в нуль, так как в противном случае в силу (14,6) якобиан (16,6) обратился бы в области G в нуль. Поэтому уравнение (3,6) можно разделить на этот коэффициент. После этого получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F_2\left(\xi,\ \eta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial \xi},\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \qquad (17,6)$$

Уравнение (17,6) имеет канонический вид в области G, как он был определен в § 5.

Если уравнение (1,6) было линейным, то уравнение (17,6) также будет линейным. Пусть оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=A_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+B_1\frac{\partial u}{\partial \eta}+C_1 u+D_1. \qquad (18,6)$$

Можно еще несколько упростить это уравнение, введя вместо u новую неизвестную функцию z. Положим

$$u=zv,$$

где $v(\xi, \eta)$ — функция от ξ и η, которую мы ниже определим. Тогда уравнение (18,6) заменится уравнением

$$v\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \eta}=A_1 v\frac{\partial z}{\partial \xi}+B_1 v\frac{\partial z}{\partial \eta}+C_2 z+D_1. \qquad (19,6)$$

Мы здесь выписали подробно только члены, содержащие производные от z, включив все члены, содержащие самую функцию z, в $C_2 z$. Выберем функцию $v(\xi, \eta)$ так, чтобы в уравнении (19,6) исчезла производная $\frac{\partial z}{\partial \eta}$. Приравняв нулю коэффициент при $\frac{\partial z}{\partial \eta}$, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=A_1\frac{\partial z}{\partial \xi}+C_3 z+D_2, \qquad (20,6)$$

где $C_3=\frac{C_2}{v}$, $D_2=\frac{D_1}{v}$, $v(\xi, \eta)=e^{\frac{1}{2}\int B_1(\xi, \eta)\,d\eta}$.

4. Рассмотрим, наконец, случай, когда всюду в рассматриваемой области

$$AC > B^2.$$

Тогда уравнение (1,6) будет в этой области эллиптическим (ср. определение эллиптичности в § 5). В этом случае мы будем предполагать, что все коэффициенты A, B и C суть аналитические функции от x и y. Тогда коэффициенты уравнений (5,6) — также аналитические функции от x и y. Пусть

$$\varphi(x, y) = \varphi^*(x, y) + i\varphi^{**}(x, y)$$

будет аналитическим решением первого из уравнений (5,6) в окрестности точки (x_0, y_0) *) и пусть $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| \neq 0$ в этой окрестности.

Положим в равенствах (2,6)

$$\xi = \varphi^*(x, y) \quad \text{и} \quad \eta = \varphi^{**}(x, y). \tag{21,6}$$

Уравнения (21,6) можно разрешить относительно x и y, так как якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{22,6}$$

нигде не обращается в нуль. В самом деле, разделяя в уравнении (5,6) действительную и мнимую части, получим

$$\left.\begin{aligned} A\frac{\partial\xi}{\partial x} &= -B\frac{\partial\xi}{\partial y} + \sqrt{AC - B^2}\,\frac{\partial\eta}{\partial y}, \\ A\frac{\partial\eta}{\partial x} &= -B\frac{\partial\eta}{\partial y} - \sqrt{AC - B^2}\,\frac{\partial\xi}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{23,6}$$

Подставляя полученные отсюда выражения для $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\eta}{\partial x}$

---

*) В некоторой окрестности любой точки (x_0, y_0) рассматриваемой области можно найти аналитическое решение $\varphi(x, y)$ уравнения (5,6), у которого в этой окрестности $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ не обращаются одновременно в нуль. Это можно сделать, например, по теореме Ковалевской, задавая при $x = x_0$ значения $\varphi(x, y)$ так, чтобы $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Мы предположим, что $\varphi(x, y)$ есть такое решение.

в якобиан (22,6), получим

$$J = \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right].$$

Отсюда видно, что этот определитель может равняться нулю только в тех точках, где

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0,$$

следовательно, в силу уравнений (23,6), где

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} = 0.$$

А таких точек в рассматриваемой области нет, так как в них мы имели бы

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Разделяя в тождестве

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

действительные и мнимые части, получим

$$A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = \\ = A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2, \quad (24,6)$$

$$A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0. \quad (25,6)$$

В силу определенности формы

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 \qquad (B^2 - AC < 0),$$

правая и левая части равенства (24,6) могут обратиться в нуль только в том случае, если

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0. \quad (26,6)$$

Но мы выбрали функцию $\varphi(x, y)$ таким образом, что равенства (26,6) не выполняются одновременно. Таким образом, в уравнении (3,6) коэффициенты при $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ совпадают и не равны нулю; поэтому уравнение (3,6) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F_2\left(\xi,\ \eta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial \xi},\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \qquad (27{,}6)$$

Этот вид эллиптического уравнения называется его каноническим видом.

Мы привели уравнение к такому виду в окрестности некоторой точки (x_0, y_0), в которой существует аналитическое решение уравнений (5,6) с отличными от нуля производными. Другими более сложными рассуждениями можно показать, что такое приведение возможно без предположения аналитичности $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, а только в предположении, что они имеют непрерывные производные до второго порядка включительно.

§ 7. Приведение к каноническому виду системы линейных уравнений с частными производными первого порядка по двум независимым переменным

Мы будем рассматривать систему уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x, y)\frac{\partial u_j}{\partial y}+f_i(x, y, u_1, \ldots, u_n) \qquad (1{,}7)$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Линейны ли f_i относительно $u_1, u_2, \ldots, u_n$ или нелинейны, нам безразлично. Будем предполагать, что коэффициенты $a_{ij}(x, y)$ действительны и в некоторой области G на плоскости (x, y) имеют непрерывные частные производные по x и y до k-го порядка включительно ($k \geqslant 1$). Тогда при некоторых дополнительных предположениях, которые у нас напечатаны дальше курсивом, систему (1,7) в некоторой окрестности произвольно взятой внутри G точки A можно привести линейным неособым преобразованием неизвестных функций $u_1, \ldots, u_n$ с коэффициентами, имеющими столько же непрерывных производных, как и коэффициенты $a_{ij}(x, y)$,