уравнении (3,6) коэффициенты при $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ совпадают и не равны нулю; поэтому уравнение (3,6) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F_2\left(\xi,\ \eta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial \xi},\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{27,6}$$

Этот вид эллиптического уравнения называется его каноническим видом.

Мы привели уравнение к такому виду в окрестности некоторой точки (x_0, y_0), в которой существует аналитическое решение уравнений (5,6) с отличными от нуля производными. Другими более сложными рассуждениями можно показать, что такое приведение возможно без предположения аналитичности $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, а только в предположении, что они имеют непрерывные производные до второго порядка включительно.

§ 7. Приведение к каноническому виду системы линейных уравнений с частными производными первого порядка по двум независимым переменным

Мы будем рассматривать систему уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x, y)\frac{\partial u_j}{\partial y}+f_i(x, y, u_1, \ldots, u_n) \tag{1,7}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Линейны ли f_i относительно $u_1, u_2, \ldots, u_n$ или нелинейны, нам безразлично. Будем предполагать, что коэффициенты $a_{ij}(x, y)$ действительны и в некоторой области G на плоскости (x, y) имеют непрерывные частные производные по x и y до k-го порядка включительно ($k \geqslant 1$). Тогда при некоторых дополнительных предположениях, которые у нас напечатаны дальше курсивом, систему (1,7) в некоторой окрестности произвольно взятой внутри G точки A можно привести линейным неособым преобразованием неизвестных функций $u_1, \ldots, u_n$ с коэффициентами, имеющими столько же непрерывных производных, как и коэффициенты $a_{ij}(x, y)$, к *каноническому виду*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_1}{\partial x}=\lambda_1(x,y)\frac{\partial v_1}{\partial y} + f_1^*(x,y,v_1,\ldots,v_n),\\
&\frac{\partial v_2}{\partial x}=\alpha_1(x,y)\frac{\partial v_1}{\partial y}+\lambda_1(x,y)\frac{\partial v_2}{\partial y} + f_2^*(x,y,v_1,\ldots,v_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial v_{n_1}}{\partial x}=\alpha_{n_1-1}(x,y)\frac{\partial v_{n_1-1}}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial v_{n_1}}{\partial y}+f_{n_1}^*(x,y,v_1,\ldots,v_n),\\
&\frac{\partial v_{n_1+1}}{\partial x}=\lambda_2(x,y)\frac{\partial v_{n_1+1}}{\partial y}+f_{n_1+1}^*(x,y,v_1,\ldots,v_n),\\
&\frac{\partial v_{n_1+2}}{\partial x}=\beta_1(x,y)\frac{\partial v_{n_1+1}}{\partial y}+\lambda_2(x,y)\frac{\partial v_{n_1+2}}{\partial y}+\\
&\qquad\qquad\qquad +f_{n_1+2}^*(x,y,v_1,\ldots,v_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial v_{n_1+n_2}}{\partial x}=\beta_{n_2-1}(x,y)\frac{\partial v_{n_1+n_2-1}}{\partial y}+\lambda_2(x,y)\frac{\partial v_{n_1+n_2}}{\partial y}+\\
&\qquad\qquad\qquad +f_{n_1+n_2}^*(x,y,v_1,\ldots,v_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial v_{n-n_k+1}}{\partial x}=\lambda_k(x,y)\frac{\partial v_{n-n_k+1}}{\partial y}+f_{n-n_k+1}^*(x,y,v_1,\ldots,v_n),\\
&\frac{\partial v_{n-n_k+2}}{\partial x}=\omega_1(x,y)\frac{\partial v_{n-n_k+1}}{\partial y}+\lambda_k(x,y)\frac{\partial v_{n-n_k+2}}{\partial y}+\\
&\qquad\qquad\qquad +f_{n-n_k+2}^*(x,y,v_1,\ldots,v_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial v_n}{\partial x}=\omega_{n_k-1}(x,y)\frac{\partial v_{n-1}}{\partial y}+\lambda_k(x,y)\frac{\partial v_n}{\partial y}+\\
&\qquad\qquad\qquad +f_n^*(x,y,v_1,\ldots,v_n).
\end{aligned}\tag{2,7}$$

Здесь $\lambda_1(x,y),\ \ldots,\ \lambda_k(x,y)$ — корни определителя матрицы

$$\| a_{ij}(x,y)\| - \lambda E,\tag{3,7}$$

$\alpha_i(x,y),\ \beta_i(x,y),\ \ldots,\ \omega_i(x,y)$ — некоторые довольно произвольные функции, имеющие непрерывные производные до k-го порядка включительно и нигде в рассматриваемой окрестности точки A не обращающиеся в нуль. Функции v_i, λ_i, α_i, $\beta_i, \ldots, \omega_i, f_1^*, \ldots, f_n^*$, вообще говоря, могут быть комплексными функциями их аргументов. Если $f_1, \ldots, f_n$ имели непрерывные производные q-го порядка, то $f_1^*, \ldots, f_n^*$ будут иметь непрерывные производные до порядка $\min\{q, k-1\}$ включительно.

Рассматриваемые нами системы (1,7) и (2,7) отличаются от системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (4,7)$$

с постоянными коэффициентами a_{ij} и соответствующей ей канонической системы (133), описанной в § 43 моего курса обыкновенных дифференциальных уравнений (Гостехиздат, 1952), только тем, что вместо $\frac{\partial}{\partial x}$ в левых частях соответствующих обыкновенных уравнений написано $\frac{d}{dx}$, а вместо $\frac{\partial}{\partial y}$ в соответствующих обыкновенных уравнениях подразумевается множитель 1. При этом у системы обыкновенных дифференциальных уравнений (133) коэффициенты постоянны и функции f и f^* зависят только от одного независимого переменного, а у соответствующих рассматриваемых нами уравнений с частными производными коэффициенты при производных зависят от двух независимых переменных, функции же f и f^* зависят кроме этих двух независимых переменных еще от всех неизвестных функций.

Приведение системы (1,7) к каноническому виду (2,7) производится совершенно той же заменой неизвестных функций, как это сделано в § 44 моего курса по обыкновенным дифференциальным уравнениям для системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Единственное, о чем теперь следует позаботиться, это доказать, что вблизи точки A коэффициенты линейного преобразования, описанного в § 44, являются такими же гладкими функциями (x, y), как и коэффициенты $a_{ij}(x, y)$ системы (1,7). Для этого нам придется несколько повторить этот § 44.

Мы будем пользоваться методом полной математической индукции. При $n = 1$ доказываемое нами утверждение о возможности приведения системы (1,7) к виду (2,7) линейным преобразованием с гладкими коэффициентами очевидно.

Допустим, что оно верно для числа уравнений, равного $n-1$. Докажем, что оно верно и для числа уравнений, равного n.

Умножим i-е уравнение системы (1,7) на k_i, где k_i — некоторые дифференцируемые функции в окрестности точки A, которые будут определены позже. Полученные уравнения просуммируем по всем i и результат запишем в виде

$$\frac{\partial\left(\sum_i k_i u_i\right)}{\partial x}=$$

$$=\sum_{i,j}\frac{\partial(a_{ij}k_iu_j)}{\partial y}+\sum_i k_if_i+\sum_i u_i\frac{\partial k_i}{\partial x}-\sum_{i,j}u_j\frac{\partial(a_{ij}k_i)}{\partial y}.$$

Определим теперь k_i так, чтобы тождественно по u_j было

$$\sum_{i,j}a_{ij}k_iu_j\equiv\lambda\sum_i k_iu_i, \tag{5,7}$$

где λ — некоторая дифференцируемая функция (x, y), действительная или комплексная. Для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при одинаковых u_j в обеих частях этого тождества были одинаковы, т. е. чтобы было

$$\lambda k_j=\sum_i a_{ij}k_i, \quad j=1, 2, \ldots, n. \tag{6,7}$$

Таким образом, для определения $k_1, k_2, \ldots, k_n$ мы получим систему n линейных однородных уравнений с n неизвестными. Чтобы эта система имела нетривиальное решение, которое только и будет для нас представлять интерес, необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из ее коэффициентов, был равен нулю. Это условие можно записать так:

$$|\lambda E-\|a_{ij}\||=0. \tag{7,7}$$

Матрица $\lambda E-\|a_{ij}\|$ называется *характеристической матрицей системы* (1,7).

Пусть λ_1 — один из корней уравнения (7,7). *Предположим, что в рассматриваемой окрестности точки A каждый корень уравнения* (7,7) *имеет одинаковую кратность для всех точек этой окрестности.* Пусть λ_1 имеет в этой окрестности кратность α_1. Тогда в этой окрестности λ_1 удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$f^{(\alpha_1-1)}(\lambda, x, y)=0,$$

где $f^{(k)}(\lambda, x, y)$ есть производная k-го порядка по λ от левой части уравнения (7,7). При этом во всей этой окрестности

$$f^{(\alpha_1)}(\lambda_1(x, y), x, y)\neq 0.$$

Поэтому согласно известной теореме о неявной функции $\lambda_1(x, y)$ в окрестности точки A будет иметь такую же гладкость, т. е. столько же непрерывных производных по x, y, как и коэффициенты a_{ij}.

Предположим еще, что в рассматриваемой окрестности точки A матрица

$$\|a_{ij}\|-\lambda_k E, \tag{8,7}$$

где λ_k — корень уравнения (7,7), *имеет один и тот же ранг r_k* *). Тогда в этой окрестности точки A система (6,7) при $\lambda=\lambda_1$ имеет решение, состоящее из функций, нигде в окрестности точки A не обращающихся в нуль одновременно, причем эти функции имеют такую же гладкость, как и a_{ij}. Обозначим их через k_{1i}. Чтобы найти такие k_{1i}, заметим следующее. Раз матрица (8,7) имеет всюду в окрестности A ранг r_1, то у точки A существует такая окрестность, в которой какие-то $n-r_1$ определенных уравнений системы (6,7) являются следствиями остальных r_1 уравнений. Поэтому всякая система функций k_{1i}, удовлетворяющих в некоторой малой окрестности точки A этим r_1 уравнениям, будет удовлетворять всей системе (6,7). Для того же чтобы найти решение этих r_1 уравнений (будем для краткости называть их уравнениями C_1), заметим следующее. Так как ранг матрицы (8,7) при $\lambda=\lambda_1$ равен r_1, то из столбцов матрицы, составленной из коэффициентов системы C_1, можно составить квадратную матрицу с неравным нулю определителем в некоторой окрестности точки A. Функции k_{1i}, являющиеся множителями у этих столбцов, будем считать неизвестными. Остальные же k_{1i} положим равными произвольным, не равным одновременно

*) Легко показать, что $r_k\geqslant n-\alpha_k$. В самом деле, производная порядка α_k по λ от определителя (7,7), как легко видеть, есть при $\lambda=\lambda_k$ линейная комбинация миноров порядка $(n-\alpha_k)$ определителя (8,7). Так как эта производная не равна нулю, то один из миноров порядка $(n-\alpha_k)$ матрицы (8,7) не равен нулю.

нулю, постоянным. Для определенности положим их все равными 1. Тогда система C_1 единственным образом определяет все другие k_{1j}, как функции, имеющие такую же гладкость, как и a_{ij}.

Итак, мы нашли в некоторой окрестности точки A функции k_{1i} $(i=1, 2, \ldots, n)$, которые нигде в этой окрестности не обращаются в нуль одновременно и которые имеют такую же гладкость, как и a_{ij}. Для определенности положим, что $k_{11} \neq 0$ в точке A. Очевидно, это нисколько не ограничивает общности, так как мы всегда можем достигнуть этого изменением нумерации u_i, что сводится к неособому линейному преобразованию u_i. Положим далее

$$z_1 = \sum_{j=1}^{n} k_{1j} u_j.$$

Очевидно, функция $z_1(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} + f_1^*(x, y, z_1, u_2, \ldots, u_n),$$

где

$$f_1^*(x, y, z_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv$$
$$\equiv \sum_i k_{1i} f_i + \sum_i u_i \frac{\partial k_{1i}}{\partial x} - \sum_{i,j} u_j \frac{\partial (a_{ij} k_{1i})}{\partial y} + z_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}$$

(см. формулу (5,7) и предшествующее ей равенство).

Далее все рассуждения § 44 моей книги по обыкновенным уравнениям применяются без каких-либо существенных изменений *). Эти рассуждения значительно упрощаются в случае, когда все корни λ уравнения (7,7) различны, и мы проведем их здесь до конца. В этом случае каждому корню λ_i, $i=1, 2, \ldots, n$, этого уравнения соответствует система функций $k_{ij}(x, y)$, $j=1, \ldots, n$, определенная по λ_i так же, как прежде

) Заметим, что для системы, состоящей из $n-1$ уравнений, которую мы, как и в § 44 моей книги по обыкновенным дифференциальным уравнениям, должны будем записать в каноническом виде, справедливы предположения, напечатанные курсивом, и поэтому, по предположению индукции, такую систему из $n-1$ уравнений можно записать в каноническом виде. Это легко проверить, выражая матрицу $\|a_{ij}\| - \lambda E$ через соответствующую матрицу преобразованной системы, аналогичной (134) § 44 книги «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений».

были определены функции $k_{1j}(x, y)$, $j=1, \ldots, n$, по λ_1. Функции $k_{ij}(x, y)$ имеют столько же непрерывных производных, как и $a_{ls}(x, y)$. При этом

$$\frac{\partial z_i}{\partial x}=\lambda_i \frac{\partial z_i}{\partial y}+f_i^*(x, y, u_1, \ldots, u_n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

где

$$z_i=\sum_{j=1}^{n} k_{ij} u_j \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Остается показать, что $|k_{ij}| \neq 0$. Допустим противное, т. е. что в некоторой точке (x^0, y^0) той области, где определены все $k_{ij}(x, y)$, $|k_{ij}(x^0, y^0)|=0$. Тогда существуют такие постоянные C_s, не все равные нулю, что

$$\sum_s C_s k_{si}(x^0, y^0)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{9,7}$$

Умножая i-е из этих равенств на a_{ij} и суммируя по i, получим

$$0=\sum_{i, s} C_s k_{si}(x^0, y^0) a_{ij}(x^0, y^0)=$$
$$=\sum_s C_s \sum_i k_{si}(x^0, y^0) a_{ij}(x^0, y^0)=\sum_s C_s \lambda_s(x^0, y^0) k_{sj}(x^0, y^0).$$

Последний переход мы сделали, используя соотношение

$$\lambda_s k_{sj}=\sum_i k_{si} a_{ij},$$

аналогичное (6,7).

Таким образом, мы получили равенства, аналогичные (9,7), где вместо C_s написано $C_s \lambda_s(x^0, y^0)$. Аналогично получим

$$\sum_s C_s \lambda_s^m(x^0, y^0) k_{si}(x^0, y^0)=0 \quad \text{при} \quad m=2, 3, \ldots, n-1.$$

Так как определитель, составленный из коэффициентов при $C_s k_{si}(x^0, y^0)$ в этих равенствах (определитель Вандермонда), отличен от 0 при различных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то мы получаем отсюда, что при всех s и i

$$C_s k_{si}(x^0, y^0)=0,$$

что невозможно.

З а м е ч а н и я. 1) Легко видеть, что все приведенные выше в этом параграфе рассуждения справедливы и в том случае, когда коэффициенты a_{ij} и f_i — комплекснозначные функции. В дальнейшем, однако, мы будем предполагать, что a_{ij}, f_i — действительные функции.

2) Если уравнение (7, 7) имеет только различные и действительные корни во всей рассматриваемой области G, то из предыдущих рассуждений следует, что в окрестности точки A каждому корню λ_i соответствует единственное, с точностью до знака, решение $k_{i1}, k_{i2}, \ldots, k_{in}$ системы (6,7), у которого в этой окрестности $\sum_{j=1}^{n} k_{ij}^2 = 1$ и функции k_{ij} имеют такую же гладкость, как и a_{ls} (ср. примечание на стр. 77). Пользуясь этим, можно показать, что при указанных условиях во всей области G, если эта область односвязна, существует неособое линейное преобразование неизвестных функций, приводящее систему (1,7) к каноническому виду (2,7). При этом коэффициенты этого преобразования имеют всюду такую же гладкость, как и a_{ij}, а система (2,7) принимает вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial y} + f_i^*(x, y, v_1, \ldots, v_n) \qquad (10,7)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

3) Если во всей рассматриваемой области G на плоскости (x, y) уравнение (7,7) не имеет действительных корней λ, то система (1,7) называется в этой области *эллиптической*.

Если во всей этой области существует линейное неособое преобразование искомых функций u_i с действительными коэффициентами такой же гладкости, как и $a_{ij}(x, y)$, приводящее систему (1,7) к виду (10,7), то система (1,7) называется *гиперболической* в области G.

Если же во всей области G все корни λ уравнения (7,7) действительны и различны, система (1,7) называется *гиперболической в узком смысле*. Из предыдущего замечания следует, что система, гиперболическая в узком смысле в односвязной области G, гиперболична в этой области.

Точно так же общая линейная система уравнений с частными производными по двум независимым переменным

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{n_j - 1} A_{ij}^k(t, x) \frac{\partial^{n_j} u_j}{\partial t^k \, \partial x^{n_j - k}} + \ldots \qquad (11,7)$$
$$(i = 1, \ldots, N)$$

называется *эллиптической* в области G, если во всей этой области определитель матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \lambda^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{n_N} \end{matrix} \right\| - \left\| \sum_{k=0}^{n_j-1} A_{ij}^k \lambda^k \right\|$$

не имеет действительных корней λ.

Если же все корни этого определителя действительны и различны, то система (11,7) называется *гиперболической в узком смысле.*

Задача. Покажите, что если система (11,7) гиперболична в узком смысле в односвязной области G, то в этой области гиперболична система уравнений первого порядка, построенная по уравнениям (11,7) так же, как система (5,2) была построена по уравнению (3,2).

4) Если все корни уравнения (7,7) действительны, то и преобразованную систему (2,7) можно сделать действительной; для этого надо выбрать действительными коэффициенты линейного преобразования от функций u_i к функциям v_i, что в этом случае всегда возможно.

Если же уравнение (7,7) имеет комплексные корни, то эти корни распадаются на пары комплексно сопряженных корней. Тогда систему (2,7) можно построить так, что каждому уравнению вида

$$\frac{\partial v_k}{\partial x} = \lambda_k \frac{\partial v_k}{\partial y} + f_k(x, y, v_1, \ldots, v_n)$$

в этой системе будет соответствовать комплексно сопряженное уравнение, т. е. уравнение

$$\frac{\partial v_l}{\partial x} = \lambda_l \frac{\partial v_l}{\partial y} + f_l(x, y, v_1, \ldots, v_n),$$

где

$$v_l = \overline{v_k}; \quad \lambda_l = \overline{\lambda_k}; \quad f_l(x, y, v_1, \ldots, v_n) = \overline{f_k(x, y, v_1, \ldots, v_n)}.$$

Отделив в этих уравнениях действительные и мнимые части и положив

$$v_k = w_k^* + i w_k^{**},$$
$$\lambda_k = a_k + i b_k,$$
$$f_k = f_k^* + i f_k^{**},$$

получим

$$\frac{\partial w_k^*}{\partial x} = a_k \frac{\partial w_k^*}{\partial y} - b_k \frac{\partial w_k^{**}}{\partial y} + f_k^*,$$

$$\frac{\partial w_k^{**}}{\partial x} = b_k \frac{\partial w_k^*}{\partial y} + a_k \frac{\partial w_k^{**}}{\partial y} + f_k^{**}.$$

Простейшей системой такого вида является известная система уравнений Коши — Римана

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{\partial w_2}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial y}.$$

Аналогично распадаются на действительную и мнимую части уравнения вида

$$\frac{\partial v_k}{\partial x} = \alpha \frac{\partial v_{k-1}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial y} + f_k(x, y, v_1, \ldots, v_n).$$

Таким образом, доказывается, что систему (1,7) можно привести линейным неособым (почему?) преобразованием с действительными гладкими коэффициентами к новому каноническому виду, где все уравнения в отличие от уравнений (2,7) обязательно действительны. (Ср. замечание к § 47 моих «Лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений», Гостехиздат, 1952.)

5) Рассмотрим гиперболическую (в узком смысле) квазилинейную систему вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x, y, u_1, \ldots, u_n) \frac{\partial u_j}{\partial y} + f_i(x, y, u_1, \ldots, u_n) \qquad (12,7)$$

$$(i = 1, \ldots, n).$$

Для такой системы величины λ и k_i, входящие в уравнения (6,7), (7,7), зависят не только от x, y, но и от $u_1, \ldots, u_n$; мы предполагаем, что в некоторой области изменения переменных $x, y, u_1, \ldots, u_n$ все корни уравнения (7,7) действительны и различны.

Пусть $k_{j1}, \ldots, k_{jn}$ — нетривиальное решение системы (6,7) при $\lambda = \lambda_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Умножая i-е уравнение (12,7) на

k_{ji} и суммируя по всем i, получим

$$\sum_{i=1}^{n} k_{ji}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x} - \lambda_j \frac{\partial u_i}{\partial y}\right) = \tilde{f}_j(x, y, u_1, \ldots, u_n) \quad (j = 1, \ldots, n). \quad (13,7)$$

В каждом из уравнений системы (13,7) содержатся производные от всех неизвестных функций только по одному направлению.

В случае $n = 2$ система (13,7) может быть приведена к виду, аналогичному (10,7). Обозначим через $\mu_j(x, y, u_1, u_2)$ частное решение уравнения

$$\frac{\partial (k_{j1}\mu_j)}{\partial u_2} = \frac{\partial (k_{j2}\mu_j)}{\partial u_1} \qquad (j = 1, 2) \qquad (14,7)$$

и введем вместо функций u_j новые неизвестные функции $v_j(x, y, u_1, u_2)$ такие, что

$$\frac{\partial v_j}{\partial u_i} = \mu_j k_{ji} \qquad (i, j = 1, 2). \qquad (15,7)$$

Соотношения (15,7) непротиворечивы, так как μ_j удовлетворяют уравнениям (14,7). Умножая j-е уравнение системы (13,7) на μ_j $(j = 1, 2)$, приходим к следующей канонической системе уравнений для v_1, v_2:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = \lambda_j \frac{\partial v_j}{\partial y} + f_j^*(x, y, v_1, v_2) \qquad (j = 1, 2). \qquad (16,7)$$

Функции v_j часто называют обобщенными инвариантами Римана.

При $n > 2$ приведение системы (12,7) к виду (16,7), вообще говоря, невозможно.