ГЛАВА II

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

РАЗДЕЛ I

ЗАДАЧА КОШИ В ОБЛАСТИ НЕАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 8. Корректность постановки задачи Коши

Теорема Ковалевской утверждает существование аналитического решения задачи Коши для аналитических уравнений при аналитических начальных данных. Многие задачи физики сводятся к задаче Коши для аналитических уравнений при начальных данных, дифференцируемых несколько раз, но не аналитических. На первый взгляд кажется естественным такой метод решения этой задачи. Заданные начальные функции и их производные приближаем многочленами. По теореме Вейерштрасса такие многочлены можно выбрать так, что на всей рассматриваемой части плоскости $t=t_0$, где задаются условия Коши, разность между этими многочленами и соответствующими заданными функциями будет как угодно мала. По теореме Ковалевской для аналитических уравнений можно решить задачу Коши, если заменить прежние начальные условия новыми, аппроксимирующими прежние. Казалось бы, естественно ожидать, что это решение новой задачи Коши с начальными условиями в виде приближающих многочленов близко к решению той же задачи при прежних начальных данных, по крайней мере вблизи той части плоскости $t=t_0$, где задаются условия Коши. Но Адамар построил пример, который показывает, что дело иногда обстоит совсем не так.

Рассмотрим следующую задачу Коши. Требуется найти решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \tag{1,8}$$

удовлетворяющее при $t=0$ условиям

$$u(0,\ x)=0, \tag{2,8$_1$}$$

$$u'_t(0,\ x)=\frac{1}{n^k}\sin nx, \tag{2,8$_2$}$$

где n и k — положительные постоянные. Легко проверить, что решением этой задачи будет

$$u(t,\ x)=\frac{1}{n^{k+1}}\operatorname{sh} nt\ \sin nx. \tag{3,8}$$

Так как

$$|u'_t\ (0,\ x)|\leqslant\frac{1}{n^k},$$

то при достаточно большом n абсолютная величина $u'_t(0,\ x)$ будет всюду как угодно мала. Решение же $u(t,\ x)$ рассматриваемой задачи Коши, как показывает формула (3,8), будет принимать как угодно большие значения при произвольно малом t, если n достаточно велико. Дело не изменится, если мы потребуем, чтобы не только $|u'_t(0,\ x)|$ был всюду мал, но чтобы были малы и все производные от $u'_t(0,\ x)$ по x до порядка $k-1$; здесь k — любое целое положительное число, большее 1. Мы не говорим о малости начальных значений самой функции u, так как по условию $(2,8)_1$ они всюду равны нулю.

Допустим, что мы нашли решение задачи Коши для уравнения (1,8) при некоторых начальных условиях

$$u(0,\ x)=\varphi_0(x),$$

$$u'_t(0,\ x)=\varphi_1(x).$$

Пусть это будет функция $u_0(t,\ x)$. Тогда для начальных условий

$$u(0,\ x)=\varphi_0(x);\quad u'_t(0,\ x)=\varphi_1\ (x)+\frac{1}{n^k}\sin nx$$

решением задачи Коши будет функция

$$u_0(t,\ x)+\frac{1}{n^{k+1}}\operatorname{sh}\ nt\ \sin\ nx.$$

Таким образом, очень малое изменение начальных функций и их производных до порядка $k-1$, полученное прибавлением к прежним начальным условиям функций $(2,8)_1$ и $(2,8)_2$, может повлечь за собой как угодно большие изменения вида (3,8) решения задачи Коши и притом в какой угодно близости от начального значения $t=0$.

Будем говорить, что задача Коши в некоторой замкнутой области $\overline{G}$ пространства $t, x_1, \ldots, x_n$, прилегающей к области G_0 на гиперплоскости $t=t_0$, где задаются условия Коши, для системы линейных уравнений вида

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k_0, k_1, \ldots, k_n} A_{ij}^{(k_0, k_1, \ldots, k_n)}(t, x_1, \ldots, x_n) \times \\ \times \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad (4,8)$$

$$i=1, 2, \ldots, N, \qquad k_0+k_1+\ldots+k_n=k \leqslant n_j, \qquad k_0 < n_j$$

поставлена корректно, если существуют такие целые положительные L_1 и L_2, что

1) для любых непрерывных вместе с их производными до порядка L_1 функций $\varphi_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)$, заданных в G_0, в области $\overline{G}$ существует единственное решение системы (4,8), удовлетворяющее при $t=t_0$ условиям:

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} = \varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (k=0, 1, \ldots, n_i-1), \quad (5,8)$$

2) для любого положительного ε можно указать такое $\eta>0$, что во всей области $\overline{G}$ решение задачи Коши изменится меньше чем на ε, если в области G_0 функции $\varphi_i^{(k)}$ и все их производные по $x_1, \ldots, x_n$ до порядка L_2 изменятся меньше чем на η.

Обычно условия Коши определяются из опыта и потому не могут быть найдены с абсолютной точностью. Ввиду этого для физики (мы всюду понимаем слово «физика» в самом широком смысле) представляют интерес решения задачи Коши только для таких уравнений, для которых эта задача поставлена корректно. Как показывает пример Адамара, задача Коши поставлена корректно далеко не для всех уравнений *).

Приведенные выше соображения о корректности постановки задачи Коши показывают, что и другие краевые задачи для уравнений с частными производными представляют интерес для естествознания только в том случае, если имеет место, в некотором смысле, непрерывная зависимость решения от краевых условий, корректность **) постановки задачи. Для каждого типа уравнений существуют свои корректно поставленные краевые задачи.

Почти во всех до сих пор рассмотренных случаях формулировки таких задач подсказаны физическими рассмотрениями. В частности, такими корректно поставленными задачами являются задачи, приведенные в § 1.

В настоящей главе корректность постановки задачи Коши доказывается для волнового уравнения в пространстве при подходящем наклоне плоскости — носительницы начальных данных — и для линейных гиперболических систем уравнений с частными производными первого порядка по двум независимым переменным. Согласно сказанному в условии задачи к замечанию 3) в § 7 отсюда следует также корректность постановки задачи Коши для общих линейных гиперболических в узком смысле систем вида (11, 7) с частными производными по двум независимым переменным в односвязной области.

---

*) Интересно отметить, что если рассматривать решения задачи Коши для уравнения Лапласа в классе функций, ограниченных по абсолютной величине наперед заданной постоянной, то малым изменениям начальных условий будут соответствовать малые изменения решения; см., например, М. М. Лаврентьев, ДАН **106** (1956), № 3, стр. 389 — 390.

**) В каждом конкретном случае понятие о корректной постановке задачи должно быть точно определено.

При определении корректности постановки задачи Коши для нелинейных уравнений естественно рассматривать в качестве возможных начальных функций $\varphi_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)$ только функции, близкие к каким-нибудь определенным функциям $\overset{\smile}{\varphi}{}_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)$. Может оказаться, что вблизи одной системы функций $\overset{\smile}{\varphi}{}_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)$ задача Коши поставлена корректно,, а вблизи другой системы функций $\overset{\smile}{\varphi}{}_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)$ — некорректно.