§ 9. Понятие об обобщенных решениях

В предыдущем параграфе мы говорили о корректности постановки задачи Коши при достаточно гладких начальных данных. Однако физические задачи далеко не всегда приводят к начальным условиям, достаточно гладким для того, чтобы можно было утверждать существование решения соответствующей задачи. Если начальные данные не являются непрерывными и дифференцируемыми достаточное число раз, то часто может не существовать и дифференцируемое решение соответствующей краевой задачи. В этом случае весьма полезным оказывается применение так называемых «обобщенных решений» дифференциальных уравнений.

Теория обобщенных решений уравнений с частными производными была разработана С. Л. Соболевым в 30-х годах. Такие решения определяются либо как предел последовательности обычных решений, либо при помощи интегральных тождеств.

Рассмотрим в качестве примера задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1,9}$$

при начальном условии

$$u(0,\ x)=\varphi(x), \tag{2,9}$$

где $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Как нетрудно проверить, решением этой задачи в области $D\{a < x+t < b\}$ является функция

$$u(t,\ x)=\varphi(x+t). \tag{3,9}$$

Пусть теперь функция $\varphi(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ непрерывна, но не дифференцируема. Известно, что такую функцию можно представить как предел равномерно сходящейся на отрезке $[a,\ b]$ последовательности функций $\varphi^{(k)}(x)$, имеющих непрерывные производные. При этом соответствующие решения $\varphi^{(k)}(x+t)$ уравнения (1,9) будут равномерно в D сходиться к функции (3,9). Это дает основание функцию (3,9) также считать решением уравнения (1,9) в обобщенном смысле.

О п р е д е л е н и е 1. Система функций $(u_1,\ \ldots,\ u_N)$ называется обобщенным решением некоторой системы дифференциальных уравнений в области G, если существует бесконечная последовательность решений $(u_1^{(k)}, \ldots, u_N^{(k)})$ этой системы, равномерно сходящаяся к $(u_1, \ldots, u_N)$, т. е. если

$$\sup_{P \in G} \sum_{i=1}^{N} |u_i(P) - u_i^{(k)}(P)| \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Замечание. Иногда систему функций $(u_1, \ldots, u_N)$ называют обобщенным решением какой-либо системы дифференциальных уравнений также и в том случае, если некоторая последовательность обычных решений $(u_1^{(k)}, \ldots, u_N^{(k)})$ сходится к $(u_1, \ldots, u_N)$ в среднем, т. е. если

$$\int_G \sum_{i=1}^{N} [u_i(P) - u_i^{(k)}(P)]^2 \, dP \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Так определенные обобщенные решения могут быть даже разрывными. (См. С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1954 (особенно стр. 314, 322, 329) и С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950.)

Расширение класса решений той или иной краевой задачи представляет интерес только в том случае, когда при этом расширении сохраняется единственность решения. Для наиболее типичных краевых задач уравнений с частными производными С. Л. Соболев доказал существование и единственность их обобщенных решений. При этом приходится особо определять, как надо понимать краевые условия для обобщенных решений.

Для линейных однородных эллиптических и параболических уравнений с достаточно гладкими коэффициентами введение указанным выше способом обобщенных решений не расширяет класса обычных решений этих уравнений (ср. теорему 4 § 30). Для гиперболических же уравнений это расширение существенно, как показывает уже рассмотренный нами простейший пример.

Введение обобщенных решений удобно тем, что для существования обычных решений основных краевых задач приходится на функции, задаваемые на границе рассматриваемой области, налагать иногда весьма жесткие условия гладкости, в то время как для существования обобщенных решений такой гладкости от заданных на границе функций не требуется. Так, обобщенное решение задачи Коши (1,9), (2,9) существует, как мы видели, при любой непрерывной функции $\varphi(x)$.

Рассмотрение обобщенных решений уравнения (1,9) тем более естественно, что обычно сама функция $\varphi(x)$ нам бывает известна только приближенно. Поэтому соответствующая функция $u(t, x)$, даваемая формулой (3,9), также является только некоторым приближением к точному решению поставленной задачи. Нам совершенно безразлично, является ли это приближение обычным или только обобщенным решением уравнения (1,9). Важно, что оно мало отличается от истинного решения, если функция $\varphi(x)$ равномерно мало отличается от истинного начального значения $u(0, x)$.

Другой способ введения обобщенных решений, также принадлежащий С. Л. Соболеву, состоит в использовании интегральных тождеств, которые для обычных решений являются следствиями рассматриваемых уравнений. Этот способ введения обобщенных решений, получивший в настоящее время широкое распространение, мы рассмотрим на примере линейного уравнения первого порядка.

Пусть функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ в области D непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению

$$L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \\ + b(x_1, \ldots, x_n) u = f(x_1, \ldots, x_n), \quad (4,9)$$

где a_i непрерывно дифференцируемы, а b и f непрерывны в D. Умножим обе части (4,9) на функцию $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$, непрерывно дифференцируемую в области D и обращающуюся в нуль в окрестности ее границы; полученное равенство проинтегрируем по области D. Интегрируя по частям, приходим к соотношению

$$\iint\limits_D [uM(\sigma) - f\sigma]\, dx_1 \ldots dx_n = 0, \quad (5,9)$$

где

$$M(\sigma) \equiv -\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} - \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial (a_i \sigma)}{\partial x_i} + b\sigma.$$

Таким образом, всякое обычное решение (4,9) удовлетворяет равенству (5,9). Но это равенство выполняется и для более широкого класса функций $u(x_1, \ldots, x_n)$, так как левая часть (5,9) не содержит производных от u. Поэтому естественно следующее определение.

Определение 2. Функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ называется обобщенным решением уравнения (4,9) в области D, если выполняется равенство (5,9) для всякой непрерывно дифференцируемой функции $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$, обращающейся в нуль во всех точках области D, расстояние которых до границы D меньше некоторого положительного числа ρ_σ (ρ_σ различные для различных σ).

При рассмотрении обобщенных решений краевых задач, как уже говорилось, следует особо указывать, в каком смысле понимаются краевые условия. Иногда эти условия (или часть из них) можно учесть, видоизменив интегральное тождество, определяющее обобщенное решение. Так, обобщенным решением задачи Коши для уравнения (4,9) в области D полупространства $x_1 \geqslant 0$, граница Γ которой содержит кусок Γ_1 гиперплоскости $x_1 = 0$, с начальным условием

$$u(0, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_2, \ldots, x_n) \text{ на } \Gamma_1, \tag{6,9}$$

называют кусочно непрерывную функцию $u(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую равенству

$$\iint\limits_D [uM(\sigma) - f\sigma]\, dx_1 \ldots dx_n - \\ - \int\limits_{\Gamma_1} \varphi(x_2, \ldots, x_n)\, \sigma(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n = 0 \tag{7,9}$$

при любой непрерывно дифференцируемой функции $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$, обращающейся в нуль в окрестности $\Gamma - \Gamma_1$.

Задача 1. Покажите, что если функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\bar{D}$ и является обобщенным решением задачи Коши (4,9), (6,9) в смысле соотношения (7,9), то эта функция удовлетворяет уравнению (4,9) и начальному условию (6,9) в обычном смысле.

Задача 2. Постройте обобщенное решение (в смысле соотношения (7,9)) задачи Коши для уравнения (1,9) с начальным условием

$$u(0,\ x)=\begin{cases}-1 & \text{при } x\leqslant 0,\\ 1 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Задача 3. Покажите, что если функция $u(t,\ x)$ является обобщенным решением уравнения (4,9) в смысле определения 1, то эта функция является также обобщенным решением (4,9) и в смысле определения 2.

§ 10. Задача Коши для гиперболических систем с двумя независимыми переменными

1. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}-\lambda_i\frac{\partial u_i}{\partial x}=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(t,\ x)\,u_j+b_i(t,\ x) \qquad (1,10)$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)\ ^{*)}.$$

Мы будем предполагать, что во всей рассматриваемой области она гиперболична, т. е. все λ_i — действительные функции от t, x. Будем предполагать еще, что все $\lambda_i(t,\ x)$ различны и перенумерованы в порядке их возрастания **).

---

*) Все последующие рассуждения настоящего параграфа с очень небольшими изменениями применимы к системам вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}-\lambda_i\frac{\partial u_i}{\partial x}=f_i(t,\ x,\ u_1,\ \ldots,\ u_N) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

в предположении, что функции $f_i(t,x,u_1,\ \ldots,\ u_N)$ имеют непрерывные производные до второго порядка включительно (ср. доказательство существования решения уравнения

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)$$

методом последовательных приближений).

**) Предположение о том, что все λ_i различны, не является существенным. Все дальнейшие рассуждения справедливы и в том случае, когда некоторые λ_i совпадают. Нужно только для определения области $\overline{G}$ вместо характеристики L_1, выходящей из точки $(0,a)$, взять решение уравнения

$$\frac{dx}{dt}=-\lambda_{\min}(t,\ x),$$

проходящее через точку $(0,\ a)$, где $\lambda_{\min}(t,\ x)=\min\{\lambda_1(t,\ x),\ldots$