с начальным условием

$$u(0,\ x)=\begin{cases}-1 & \text{при } x\leqslant 0,\\ \ \ 1 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Задача 3. Покажите, что если функция $u(t,\ x)$ является обобщенным решением уравнения (4,9) в смысле определения 1, то эта функция является также обобщенным решением (4,9) и в смысле определения 2.

§ 10. Задача Коши для гиперболических систем с двумя независимыми переменными

1. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}-\lambda_i\frac{\partial u_i}{\partial x}=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(t,\ x)\,u_j+b_i(t,\ x) \qquad (1{,}10)$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)\ ^{*)}.$$

Мы будем предполагать, что во всей рассматриваемой области она гиперболична, т. е. все λ_i — действительные функции от t, x. Будем предполагать еще, что все $\lambda_i(t,\ x)$ различны и перенумерованы в порядке их возрастания **).

---

*) Все последующие рассуждения настоящего параграфа с очень небольшими изменениями применимы к системам вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}-\lambda_i\frac{\partial u_i}{\partial x}=f_i(t,\ x,\ u_1,\ \ldots,\ u_N) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

в предположении, что функции $f_i(t,x,u_1,\ \ldots,\ u_N)$ имеют непрерывные производные до второго порядка включительно (ср. доказательство существования решения уравнения

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)$$

методом последовательных приближений).

**) Предположение о том, что все λ_i различны, не является существенным. Все дальнейшие рассуждения справедливы и в том случае, когда некоторые λ_i совпадают. Нужно только для определения области $\overline{G}$ вместо характеристики L_1, выходящей из точки $(0,a)$, взять решение уравнения

$$\frac{dx}{dt}=-\lambda_{\min}(t,\ x),$$

проходящее через точку $(0,\ a)$, где $\lambda_{\min}(t,\ x)=\min\{\lambda_1(t,\ x),\ldots$

Через каждую точку нашей области проходит N действительных характеристик L_i с угловыми коэффициентами $k_i = -\frac{1}{\lambda_i}$ по отношению к оси x (см. пример 5, § 3).

Если не делать предположения об аналитичности коэффициентов системы (1,10), то из теоремы Ковалевской нельзя сделать никаких выводов о разрешимости задачи Коши для этой системы. Мы предположим, что в некоторой замкнутой области $\overline{G}$, ограниченной отрезком $[a, b]$ оси Ox и характеристиками L_1 и L_N, выходящими соответственно из точек $(0, a)$ и $(0, b)$ (рис. 2) *), функции a_{ij}, b_i и λ_i непрерывны и имеют непрерывные первые производные. Зададим на отрезке $[a, b]$ N непрерывно дифференцируемых функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x)$ и поставим для системы (1,10) задачу Коши таким образом:

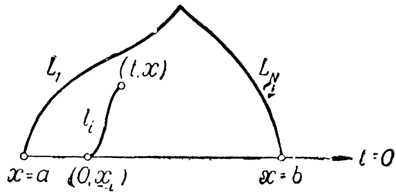

Рис. 2.

Найти непрерывное в $\overline{G}$ решение $u_1, u_2, \ldots, u_N$ системы (1,10), *имеющее в G непрерывные первые производные, и такое, что при $t=0$*

$$u_i(0, x) = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{2,10}$$

При сделанных предложениях поставленная задача имеет решение и притом только одно.

$\ldots, \lambda_N(t, x)\}$, и вместо L_N — проходящее через точку $(0, b)$ решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_{\max}(t, x),$$

где $\lambda_{\max}(t,x) = \max\{\lambda_1(t, x), \ldots, \lambda_N(t, x)\}$. Функции $\lambda_{\min}(t, x)$ и $\lambda_{\max}(t, x)$ непрерывны и, как легко показать, удовлетворяют условию Липшица по t, если все λ_i непрерывны и имеют по t ограниченные производные.

*) Линии L_1 и L_N не обязательно пересекаются. Соответственно этому область G может быть бесконечной. Для дальнейшего существенно, чтобы область G была ограниченной. Этого всегда можно достигнуть, ограничив G в случае надобности прямой $t = T$.

Все дальнейшие рассуждения были бы также применимы, если бы область G была расположена в полуплоскости $t < 0$.

Доказательство. Рассмотрим i-е уравнение системы (1,10). Его левая часть с точностью до множителя есть производная функции $u_i(t, x)$ вдоль кривой L_i. Действительно, если обозначить через α_i угол между касательной к кривой L_i в точке (t, x) и осью Ox, то, как было указано,

$$\operatorname{tg} \alpha_i = -\frac{1}{\lambda_i}.$$

Следовательно,

$$\cos \alpha_i = -\frac{\lambda_i}{\sqrt{1+\lambda_i^2}}; \qquad \sin \alpha_i = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}},$$

и

$$\frac{\partial u_i}{\partial s_i} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x}\right) \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}}.$$

Мы обозначили здесь через s_i длину дуги характеристики L_i; $\frac{\partial}{\partial s_i}$ означает дифференцирование по направлению характеристики L_i.

Можно переписать систему (1,10) в виде

$$\sqrt{1+\lambda_i^2} \frac{\partial u_i}{\partial s_i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} u_j + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{3,10}$$

Если обозначить через $\underset{i}{du_i}$ дифференциал функции u_i при движении вдоль кривой L_i, то из (3, 10) получим

$$\underset{i}{du_i} = \left(\sum a_{ij} u_j + b_i\right) \frac{ds_i}{\sqrt{1+\lambda_i^2}}$$

и так как $ds_i = \sqrt{1+\lambda_i^2}\, dt$, то

$$\underset{i}{du_i} = \left(\sum a_{ij} u_j + b_i\right) dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{4,10}$$

Зафиксируем теперь произвольную точку (t, x) области $\bar{G}$ и обозначим через l_i часть соответствующей кривой L_i от точки (t, x) до ее пересечения в некоторой точке $(0, x_i)$ с отрезком $[a, b]$ оси $t = 0$ (см. рис. 2). После этого проинтегрируем i-е соотношение формулы (4,10) по дуге l_i от точки $(0, x_i)$ до точки (t, x). Получим систему интегральных уравнений

$$u_i(t, x) - u_i(0, x_i) = \int_{l_i} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij} u_j + b_i \right) dt.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N),$$

или, в силу начальных условий (2,10),

$$u_i(t, x) = \varphi_i(x_i) + \int_{l_i} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij} u_j + b_i \right) dt. \qquad (5,10)$$

Очевидно, что всякое решение системы (1,10), удовлетворяющее начальным условиям (2,10), является решением системы (5,10). Обратно, если мы имеем решение системы интегральных уравнений (5,10), причем функции, составляющие это решение, имеют в G непрерывные производные по t и по x, то, произведя действия, обратные тем, с помощью которых мы перешли от (1,10) к (5,10), мы убедимся, что решение системы (5,10) является также решением поставленной задачи Коши. Задача свелась, таким образом, к доказательству существования непрерывно дифференцируемого решения системы (5,10).

Построим последовательные приближения к решению системы (5,10) следующим образом: положим

$$u_i^{(0)}(t, x) = \varphi_i(x_i) \qquad (i = 1, \ldots, N),$$

$$u_i^{(1)}(t, x) = \varphi_i(x_i) + \int_{l_i} \left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t, x) u_j^{(0)} + b_i(t, x) \right] dt$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N)$$

и вообще

$$u_i^{(n+1)}(t, x) = \varphi_i(x_i) + \int_{l_i} \left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t, x) u_j^{(n)} + b_i(t, x) \right] dt$$

$$(i = 1, \ldots, N).$$

Последнее равенство точнее надо было бы записать так:

$$u_i^{(n+1)}(t, x) = \varphi_i[x_i(0, t, x)] + \\ + \int_0^t \Big[\sum_{j=1}^N a_{ij}(\tau, x_i(\tau, t, x))\, u_j^{(n)}(\tau, x_i(\tau, t, x)) + \\ + b_i(\tau, x_i(\tau, t, x))\Big] d\tau \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Мы считаем, что $x = x_i(t, t^0, x^0)$ есть уравнение характеристики L_i, проходящей через точку (t^0, x^0). Если мы докажем равномерную сходимость последовательностей $u_i^{(n)}(t, x)$ в замкнутой области $\bar{G}$, то система предельных функций $u_i(t, x)$ будет удовлетворять уравнениям (5,10). Равномерная сходимость последовательности $u_i^{(n)}(t, x)$ эквивалентна равномерной сходимости ряда

$$u_i^{(0)}(t, x) + \sum_{n=0}^{\infty} [u_i^{(n+1)}(t, x) - u_i^{(n)}(t, x)]. \qquad (6,10)$$

Для доказательства равномерной сходимости этого ряда построим для него числовую мажоранту. Так как функции $u_i^{(0)}(t, x)$ и $u_i^{(1)}(t, x)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{G}$, то они ограничены в этой области.

Положим

$$M = \max\{|u_1^{(0)}|, \ldots, |u_N^{(0)}|, |u_1^{(1)}|, \ldots, |u_N^{(1)}|\}$$

в области $\bar{G}$. Тогда

$$|u_i^{(0)}(t, x)| \leqslant M, \\ |u_i^{(1)} - u_i^{(0)}| \leqslant 2M, \\ (t, x) \in \bar{G}.$$

Обозначим $\max|a_{ij}|$ в области $\bar{G}$ для всех $i, j = 1, \ldots, N$ через A. Тогда

$$|u_i^{(2)}(t, x) - u_i^{(1)}(t, x)| \leqslant \int_{l_i} \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \cdot |u_j^{(1)} - u_j^{(0)}|\, dt \leqslant 2MANt,$$

$$|u_i^{(3)}(t, x) - u_i^{(2)}(t, x)| \leqslant \\ \leqslant \int_{l_i} \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \cdot |u_j^{(2)} - u_j^{(1)}|\, dt \leqslant 2MA^2N^2\frac{t^2}{2}.$$

Предположим теперь, что

$$|u_i^{(n)}(t, x) - u_i^{(n-1)}(t, x)| \leqslant 2M \frac{A^{n-1}N^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Тогда

$$|u_i^{(n+1)}(t, x) - u_i^{(n)}(t, x)| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{l_i} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| \cdot |u_j^{(n)} - u_j^{(n-1)}| \, dt \leqslant 2M \frac{A^n N^n t^n}{n!}.$$

Итак, согласно методу математической индукции, для любого n

$$|u_i^{(n+1)}(t, x) - u_i^{(n)}(t, x)| \leqslant 2M \frac{(ANt)^n}{n!}.$$

Но область G ограничена и, взяв фиксированное число T, превосходящее все значения t в этой области, мы получим, что во всей области G

$$|u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}| \leqslant 2M \frac{(ANT)^n}{n!}.$$

Так как числовой ряд $\sum \frac{(ANT)^n}{n!}$ сходится, то ряд (6, 10) сходится равномерно во всей замкнутой области $\overline{G}$, что и доказывает существование и непрерывность решения системы (5,10).

Докажем теперь единственность непрерывного в $\overline{G}$ и, следовательно, ограниченного решения системы (5,10). Допустим, что мы имеем два таких решения системы (5,10) $u_1, \ldots, u_N$ и $\breve{u}_1, \ldots, \breve{u}_N$. Подставляя оба решения в систему и вычитая друг из друга соответствующие уравнения, получим

$$u_i(t, x) - \breve{u}_i(t, x) = \int\limits_{l_i} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(u_j - \breve{u}_j) \, dt.$$

Допустим теперь, что

$$\max_{\substack{(x, t) \in \overline{G} \\ i=1, \ldots, N}} |u_i - \breve{u}_i| = M > 0.$$

Тогда, произведя повторные оценки разности $|u_i(t, x) - \breve{u}_i(t, x)|$, как это делалось при доказательстве существования, мы получим, что

$$M \leqslant M \frac{(ANT)^n}{n!}$$

для любого n, что приводит к противоречию, как только n станет достаточно велико. Следовательно, $M=0$ и

$$u_i(t, x)=\tilde{u}_i(t, x) \quad (i=1, 2, \ldots, N),$$

т. е. решение единственно.

Чтобы закончить доказательство, нам осталось убедиться, что найденные функции $u_i(t, x)$ имеют непрерывные первые производные по t и x. Очевидно, для этого достаточно доказать, что функции $u_i(t, x)$ имеют непрерывные первые производные по направлению l_i и по x в каждой точке, так как из этого и из гладкости l_i следует непрерывность производных по t и x во всей области G.

Существование и непрерывность производных $u_i(t, x)$ вдоль l_i непосредственно вытекает из системы (5,10) и непрерывности полученного решения. Для того чтобы доказать существование и непрерывность производных $\frac{\partial u_i}{\partial x}$, заметим сначала, что из предположенной непрерывной дифференцируемости $\varphi_i(x)$, $\lambda_i(t, x)$, $a_{ij}(t, x)$, $b_i(t, x)$ следует, что все приближения, построенные при доказательстве существования решения, имеют непрерывную производную по x. Продифференцируем по x равенство, определяющее $(n+1)$-е приближение. Получим

$$\frac{\partial u_i^{(n+1)}(t, x)}{\partial x}=\varphi_i'[x_i(0, t, x)]\frac{\partial x_i(0, t, x)}{\partial x}+$$
$$+\int_0^t\left[\sum_j\frac{\partial a_{ij}(\tau, x_i(\tau, t, x))}{\partial x}u_j^{(n)}(\tau, x_i(\tau, t, x))+\right.$$
$$+\sum_j a_{ij}(\tau, x_i(\tau, t, x))\frac{\partial u_j^{(n)}(\tau, x_i(\tau, t, x))}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i(\tau, t, x)}{\partial x}+$$
$$\left.+\frac{\partial b_i(\tau, x_i(\tau, t, x))}{\partial x}\right]d\tau\,^{*)}$$
$$(i=1, 2, \ldots, N).$$

*) Координата x_i точки пересечения l_i с прямой $t=\tau$ является непрерывно дифференцируемой функцией t и x в силу предположенной непрерывности производных от λ_i. Пределы интегрирования по t в криволинейном интеграле не меняются с изменением x.

В силу сделанных относительно системы (1,10) предположений можно доказать равномерную сходимость последовательности $\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x}$ $(n=1, 2, \ldots)$ в точности тем же методом, каким доказывалась сходимость $u_i^{(n)}$, причем в оценках изменятся только константы. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x} = \frac{\partial u_i}{\partial x}$ и эта функция непрерывна, что и требовалось доказать.

Если бы функции $\varphi_i(x)$ были только непрерывны и не имели производных, то построения, описанные в начале настоящего параграфа, дали бы только обобщенные решения системы (1,10) (ср. следующий пункт).

2. Мы доказали существование и единственность решения задачи Коши для системы (1,10) в классе функций, имеющих непрерывные производные 1-го порядка. Чтобы доказать корректность поставленной задачи, докажем следующую теорему (ср. § 8).

Если начальные функции $\varphi_i(x)$ задачи Коши заменить такими функциями $\psi_i(x)$, чтобы они отличались от соответствующих $\varphi_i(x)$ меньше, чем на η, то функции $v_i(t, x)$, из которых составляется решение измененной задачи Коши, будут отличаться от соответствующих $u_i(t, x)$ меньше, чем на ε, причем $\varepsilon \to 0$, если $\eta \to 0$.

Положим

$$\varphi_i(x) - \psi_i(x) = \eta_i(x), \tag{7,10}$$
$$u_i(t, x) - v_i(t, x) = z_i(t, x).$$

Функции $z_i(t, x)$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$z_i(t, x) = \eta_i(x_i) + \int\limits_{l_i} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij} z_j\right) dt. \tag{8,10}$$

Положим

$$\max_{\substack{(t, x) \in \overline{G} \\ i=1, \ldots, N}} |z_i(t, x)| = \varepsilon.$$

Тогда, повторяя оценку, проведенную при доказательстве существования решения, получаем

$$|z_i(t, x)| \leqslant \eta + A\varepsilon N t. \tag{9,10}$$

Пользуясь неравенством (9,10) и снова оценивая $|z_i(t, x)|$ с помощью уравнения (8,10), получим

$$|z_i(t, x)| \leqslant \eta(1 + ANt) + \varepsilon \frac{A^2N^2t^2}{2!}.$$

Повторив эту операцию n раз, мы докажем неравенство

$$|z_i(t, x)| \leqslant \eta\left(1 + ANt + \ldots + \frac{(ANt)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + \varepsilon \frac{(ANt)^n}{n!}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы получаем

$$\varepsilon \leqslant \eta e^{ANT}.$$

Отсюда видно, что $\varepsilon \to 0$ при $\eta \to 0$, так как e^{ANT} — постоянная, не зависящая от η.

Задача 1. Сформулируйте определение обобщенного решения задачи Коши для системы (1,10) при условиях (2,10) с помощью интегрального тождества аналогично тому, как это сделано в § 9 для уравнения (4,9).

Задача 2. Докажите единственность обобщенного решения задачи Коши (1,10), (2,10) в классе функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых вне конечного числа гладких линий.

Задача 3. Пусть обобщенное решение задачи Коши (1,10), (2,10) имеет конечное число гладких линий разрыва первого рода, вне которых оно непрерывно дифференцируемо. Покажите, что эти линии являются характеристиками системы (1,10).

3. В заключение настоящего параграфа мы дадим краткое описание метода конечных разностей, удобного для практического приближенного решения задачи Коши, поставленной в п. 1.

Пусть на отрезке $[a, b]$ оси Ox нам заданы начальные функции $\varphi_i(x)$. Чтобы приближенно найти значения функций $u_i(t, x)$, удовлетворяющих системе (1,10) и при $t=0$ принимающих заданные значения $\varphi_i(x)$, мы поступим следующим образом.

Зафиксируем некоторое целое число n и разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$. После этого проведем прямые $x = a + ph$ и прямые $t = qh$ для таких целых значений p и q, чтобы область G, в которой ищется решение задачи Коши (см. п. 1 настоящего параграфа), была покрыта квадратной сеткой со стороной квадрата, равной h. Занумеруем вершины квадратов двумя индексами, а именно обозначим через M_{pq} точку пересечения прямых $x=a+ph$ и $t=qh$. Нам заданы значения искомых функций $u_i(t, x)$ во всех точках M_{p0}: $u_i(0, a+ph)=\varphi_i(a+ph)=$ $=\varphi_i(M_{p0})$. Опишем процесс, с помощью которого можно приближенно найти значения $u_i(t, x)$ во всех вершинах сетки, лежащих внутри G. В каждой из точек M_{p0} определены коэффициенты системы (1,10) и, в частности, N чисел $\lambda_i(M_{p0})=\lambda_i^{p0}$ $(i=1, \ldots, N)$. Из каждой точки M_{p0} проведем N отрезков прямых с угловыми коэффициентами $k_i^{p0}=-\frac{1}{\lambda_i^{p0}}$ до пересечения с прямой $t=h$ и найдем значения $u_i(t, x)$ в противоположных концах соответствующих отрезков. Для этого воспользуемся формой (4,10) системы (1,10) и заменим дифференциал при движении вдоль характеристики L_i приращением, а соответствующее точное равенство — приближенным. Мы получим соотношение

$$\underset{i}{\Delta} u_i \approx \left(\sum a_{ij}u_j+b_i\right) h,$$

позволяющее найти приращение функции $\underset{i}{\Delta} u_i$ при переходе из точки M_{p0} вдоль характеристики L_i (точнее, вдоль касательной к этой характеристике) на прямую $t=h$.

Прибавив найденные приращения к исходным значениям функции в точках M_{p0}, мы найдем значения каждой функции u_i в точках прямой $t=h$. При этом значения различных функций будут определены, вообще говоря, в различных точках. С помощью какого-либо интерполяционного процесса по найденным значениям u_i на прямой $t=h$ определим ее значения в точках M_{p1} — вершинах сетки, лежащих на этой прямой. После этого можно продолжать определение значений $u_i(t, x)$ тем же методом и определить эти значения в точках прямой $t=2h$, принадлежащих области G. Повторяя интерполяцию и дальнейшее определение значений $u_i(t,x)$ столько раз, сколько понадобится, мы найдем, таким образом, приближенные значения всех функций $u_i(t, x)$ во всех вершинах квадратов, лежащих в области G.

Можно показать, что при $n \to \infty$ приближенные значения функций равномерно сходятся к пределу, дающему точное решение задачи Коши, и, следовательно, при достаточно большом n приближения, найденные описанным методом, сколь угодно мало отличаются от истинного решения.

Если $N=2$, процесс приближенного вычисления решения задачи Коши значительно упрощается. Тогда имеются только два семейства характеристик. Разбив отрезок $[a, b]$ оси Ox, на котором заданы начальные значения u_1 и u_2, на малые интервалы и проведя в точках деления касательные к характеристикам различных семейств до их ближайшего к отрезку $[a, b]$ пересечения, мы приближенно найдем значения u_1 и u_2 в этих точках пересечения, как было описано выше. Проведя из этих новых точек касательные к характеристикам, мы таким же способом приближенно найдем значения u_1 и u_2 в точках пересечения этих новых касательных, ближайших к отрезку $[a, b]$ и т. д. Таким образом, мы получим значения u_1 и u_2 на некотором достаточно плотно расположенном множестве точек, если начальное разделение отрезка $[a, b]$ достаточно мелко. Никакой квадратной сетки и интерполяции в этом случае не требуется.

§ 11. Задача Коши для волнового уравнения. Теорема о единственности решения

Пусть функция $u(t, x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \tag{1,11}$$

внутри круглого конуса K с осью, параллельной оси Ot, вершиной в точке A и образующими, составляющими с осью Ot угол $\alpha=45°$. Пусть, кроме того, сама функция $u(t, x_1, x_2)$ и все ее производные до 2-го порядка включительно непрерывны внутри и на границе K.

Тогда значение $u(t, x_1, x_2)$ в точке A однозначно определяется значениями u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ на основании конуса, лежащем в плоскости $t=t_0$.

Конус K называется *характеристическим*. Легко видеть, что боковая поверхность K является характеристической поверхностью в смысле п. 2 § 3.