Можно показать, что при $n \to \infty$ приближенные значения функций равномерно сходятся к пределу, дающему точное решение задачи Коши, и, следовательно, при достаточно большом n приближения, найденные описанным методом, сколь угодно мало отличаются от истинного решения.

Если $N=2$, процесс приближенного вычисления решения задачи Коши значительно упрощается. Тогда имеются только два семейства характеристик. Разбив отрезок $[a, b]$ оси Ox, на котором заданы начальные значения u_1 и u_2, на малые интервалы и проведя в точках деления касательные к характеристикам различных семейств до их ближайшего к отрезку $[a, b]$ пересечения, мы приближенно найдем значения u_1 и u_2 в этих точках пересечения, как было описано выше. Проведя из этих новых точек касательные к характеристикам, мы таким же способом приближенно найдем значения u_1 и u_2 в точках пересечения этих новых касательных, ближайших к отрезку $[a, b]$ и т. д. Таким образом, мы получим значения u_1 и u_2 на некотором достаточно плотно расположенном множестве точек, если начальное разделение отрезка $[a, b]$ достаточно мелко. Никакой квадратной сетки и интерполяции в этом случае не требуется.

§ 11. Задача Коши для волнового уравнения. Теорема о единственности решения

Пусть функция $u(t, x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \tag{1,11}$$

внутри круглого конуса K с осью, параллельной оси Ot, вершиной в точке A и образующими, составляющими с осью Ot угол $\alpha=45°$. Пусть, кроме того, сама функция $u(t, x_1, x_2)$ и все ее производные до 2-го порядка включительно непрерывны внутри и на границе K.

Тогда значение $u(t, x_1, x_2)$ в точке A однозначно определяется значениями u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ на основании конуса, лежащем в плоскости $t=t_0$.

Конус K называется *характеристическим*. Легко видеть, что боковая поверхность K является характеристической поверхностью в смысле п. 2 § 3.

Теорема одинаково верна как в том случае, когда у точки A координата $t > t_0$, так и в том случае, когда $t < t_0$.

Замечания. 1) Вместо уравнения (1,11) в формулировке теоремы можно было бы взять уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right), \tag{2,11}$$

где $a > 0$ — любая постоянная, заменив соответственно конус с образующими, составляющими угол 45° с Ot, другим конусом, образующие которого наклонены к оси Ot под углом $\alpha = \operatorname{arctg} a$. Действительно, уравнение (2,11) сводится к уравнению (1,11) заменой at на t.

2) Мы всегда можем считать, что $t_0 = 0$. Случай любого t_0 сводится к этому, если вместо независимой переменной t ввести новую независимую переменную $t^* = t - t_0$, от чего вид уравнения (1,11) не изменится.

3) Допустим, что в плоскости $t = 0$ нам задана область G_0. Построим конусы K с основаниями, лежащими в области G_0, с осями, параллельными оси Ot, и с образующими, составляющими с Ot угол $\pm 45°$. Тогда из нашей теоремы следует, что задание u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ в области G_0 однозначно определяет решение уравнения (1,11) в области G пространства (t, x_1, x_2), заполненной конусами K. Например, задание u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ в квадрате $|x_1| < a$, $|x_2| < a$ однозначно определяет дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(t, x_1, x_2)$ уравнения (1,11) внутри каждой из двух пирамид, для которых этот квадрат является общим основанием, а боковые грани составляют с основанием угол в 45°.

4) Задание u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ в каком-нибудь круге G_0, лежащем в плоскости (x_1, x_2), не определяет решение u (t, x_1, x_2) уравнения (1, 11) ни в какой точке B, лежащей вне соответствующих конусов K, у которых общим основанием служит круг G_0, оси параллельны оси Ot, а образующие составляют с осью Ot углы в 45°. Для доказательства этого достаточно убедиться, что существует такое решение $\tilde{u}$ (t, x_1, x_2), что $\tilde{u}$ и $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}$ равны нулю в круге G_0, а $\tilde{u}(B) \neq 0$. Для построения такого решения заметим, что при любой дважды непрерывно

дифференцируемой функции $f(z)$ и $\alpha_1^2+\alpha_2^2=1$ функция

$$f(t+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) \tag{3,11}$$

является решением уравнения (1,11). (Проверьте!)

Функция (3,11) сохраняет постоянные значения на всякой плоскости

$$t+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2=C, \tag{4,11}$$

каждая из которых составляет угол в 45° с Ot. Подберем α_1 и α_2 так, чтобы та плоскость семейства (4,11), которая проходит через точку B, не пересекала круга G_0. После этого можно подобрать дважды непрерывно дифференцируемую функцию $f(z)$ таким образом, чтобы $f(t+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)$ была отлична от нуля в точке B и равна нулю в G_0. Тогда $\tilde{u}(t, x_1, x_2)=f(t+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)$ будет искомым решением.

5) Приводимое ниже доказательство теоремы о единственности применимо для дважды непрерывно дифференцируемых решений уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

при любом n. В этом случае трехмерный конус K в формулировке теоремы нужно было бы заменить конусом в пространстве $n+1$ измерений, у которого ось параллельна оси Ot и образующие составляют угол в 45° с Ot. Этот конус также называется характеристическим. При $n=1$ этот конус заменится треугольником, у которого основание параллельно оси Ox, а боковые стороны наклонены к ней под углом в 45°.

Доказательство теоремы о единственности. Допустим, что внутри конуса K и на его поверхности существуют два непрерывных вместе с их производными до 2-го порядка включительно решения $u_1(t, x_1, x_2)$ и $u_2(t, x_1, x_2)$ уравнения (1,11), которые вместе с их первыми производными по t совпадают на основании K. Тогда разность

$$u(t, x_1, x_2)=u_2(t, x_1, x_2)-u_1(t, x_1, x_2)$$

должна внутри K также удовлетворять однородному уравнению (1,11), а на основании этого конуса $u(t, x_1, x_2)$ и $u_t(t, x_1, x_2)$ должны обращаться в нуль. Теорема о единственности будет доказана, если мы докажем, что $u(t, x_1, x_2)=0$ в вершине K. Чтобы доказать это, проинтегрируем по внутренности конуса K выражение

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right),$$

которое там всюду равно нулю, так как функция u удовлетворяет уравнению (1,11). Так как

$$\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2,$$

а

$$\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

то

$$0=\iiint\limits_K \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)dt\,dx_1\,dx_2=$$

$$=\iiint\limits_K \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right\}dt\,dx_1\,dx_2.$$

Преобразуем этот интеграл в двойной по формуле Остроградского. Если через K_1 обозначить боковую поверхность конуса K, а через C — его основание, то, поскольку на C в силу начальных условий $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{\partial u}{\partial x_2}=0$, останется только интеграл по K_1:

$$0=\frac{1}{2}\iint\limits_{K_1}\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]\cos(n,\ t)-\right.$$

$$\left.-2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(n,\ x_1)-2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(n,\ x_2)\right\}d\sigma\ ^{*}). \quad (5,11)$$

---

*) Обращаем внимание на то, что в рассматриваемых преобразованиях интеграла

$$\iiint\limits_K \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)dt\,dx_1\,dx_2$$

мы использовали непрерывность первых производных u внутри и на границе K и интегрируемость по K вторых производных от u. Вторые производные от u во всяком случае интегрируемы по K, если они непрерывны внутри K и на его границе.

Но на боковой поверхности характеристического конуса

$$\cos^2(n, t) - \cos^2(n, x_1) - \cos^2(n, x_2) = 0. \qquad (6,11)$$

Умножив и разделив подынтегральную функцию на $\cos(n, t)$ и воспользовавшись соотношением (6,11), получим из (5,11)

$$\frac{1}{2\cos(n, t)} \iint\limits_{K_1} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cos(n, x_1) - \frac{\partial u}{\partial x_1} \cos(n, t) \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cos(n, x_2) - \frac{\partial u}{\partial x_2} \cos(n, t) \right)^2 \right\} d\sigma = 0. \qquad (7,11)$$

При этом $\cos(n, t)$ вынесен за знак интеграла, так как на K_1 эта величина постоянная $\left(\cos(n, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\right.$ при $t > t_0$ и $\cos(n, t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ при $\left. t < t_0\right)$.

Из равенства (7,11) следует, что на боковой поверхности конуса K

$$\frac{u'_t}{\cos(n, t)} = \frac{u'_{x_1}}{\cos(n, x_1)} = \frac{u'_{x_2}}{\cos(n, x_2)} = v. \qquad (8,11)$$

Если обозначим через m направление какой-нибудь образующей конуса K, то, воспользовавшись равенствами (8,11), получим

$$\frac{\partial u}{\partial m} = u'_t \cos(m, t) + u'_{x_1} \cos(m, x_1) + u'_{x_2} \cos(m, x_2) =$$
$$= v\,[\cos(n, t)\cos(m, t) + \cos(n, x_1)\cos(m, x_1) +$$
$$+ \cos(n, x_2)\cos(m, x_2)] = v\cos(m, n) = 0$$

($\cos(m,n) = 0$ потому, что образующая конуса всегда составляет прямой угол с нормалью к его поверхности).

Итак, на поверхности конуса K производная от u по направлению образующей равна нулю. Отсюда следует, что функция u равна нулю в вершине конуса, так как она равна нулю на его основании. Этим заканчивается доказательство теоремы о единственности.