§ 12. Формулы, дающие решение задачи Коши для волнового уравнения

1. Пусть в некоторой области G_0 пространства (x_1, x_2, x_3) заданы функции $\varphi_0(x_1, x_2, x_3)$ и $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$, причем φ_0 непрерывна вместе со своими производными до третьего, а φ_1 — до второго порядка включительно. Мы хотим найти решение $u(t, x_1, x_2, x_3)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \tag{1,12}$$

удовлетворяющее при $t=0$ условиям

$$u(0, x_1, x_2, x_3)=\varphi_0(x_1, x_2, x_3), \qquad (2,12)_1$$

$$u'_t(0, x_1, x_2, x_3)=\varphi_1(x_1, x_2, x_3). \qquad (2,12)_2$$

Это решение будет определено во всех точках (t, x_1, x_2, x_3), служащих вершинами характеристических конусов, основания которых принадлежат G_0.

Найдем сначала решение $u_\varphi(t, x_1, x_2, x_3)$ уравнения (1,12) при начальных условиях частного вида:

$$u_\varphi(0, x_1, x_2, x_3)=0, \qquad (3,12)_1$$

$$u'_{\varphi t}(0, x_1, x_2, x_3)=\varphi(x_1, x_2, x_3). \qquad (3,12)_2$$

Тогда легко убедиться, что функция

$$v(t, x_1, x_2, x_3)=\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}$$

удовлетворяет при $t=0$ условиям

$$v(0, x_1, x_2, x_3)=\varphi(x_1, x_2, x_3),$$

$$v'_t(0, x_1, x_2, x_3)=\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_3^2}=0.$$

Поэтому, если u_φ имеет непрерывные производные третьего порядка, решение уравнения (1,12), удовлетворяющее обоим условиям (2,12), дается формулой

$$u=\frac{\partial u_{\varphi_0}}{\partial t}+u_{\varphi_1}. \tag{4,12}$$

Таким образом, общая задача Коши для уравнения (1,12) сводится к нахождению u_φ. Мы утверждаем, что справедлива формула

$$u_\varphi(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_t(x_1, x_2, x_3)} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{t} \, d\sigma_t. \qquad (5,12)$$

Эта формула называется *формулой Кирхгофа*. Здесь $S_t(x_1, x_2, x_3)$ означает сферу радиуса t с центром в точке (x_1, x_2, x_3) на гиперплоскости $t=0$, где задана функция φ, а $d\sigma_t$ — элемент поверхности этой сферы. Мы будем предполагать, что функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ непрерывна и ограничена вместе со своими производными до k-го порядка включительно ($k \geqslant 2$); тогда и функция u_φ, как будет дальше видно из формулы (6,12), будет иметь непрерывные производные до k-го порядка включительно.

Покажем сначала, что функция u_φ, даваемая формулой (5,12), удовлетворяет начальным условиям (3,12). Первое из этих условий удовлетворяется потому, что

$$\left| \iint\limits_{S_t} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{t} \, d\sigma_t \right| \leqslant \max |\varphi| \cdot \frac{4\pi t^2}{t},$$

и следовательно,

$$u_\varphi(t, x_1, x_2, x_3) \to 0 \text{ при } t \to 0.$$

Чтобы проверить второе условие, заметим, что, положив

$$\alpha_k = x_k + \beta_k t,$$

мы приведем интеграл (5,12) к виду

$$u_\varphi(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{S_1} \varphi(x_1 + t\beta_1, x_2 + t\beta_2, x_3 + t\beta_3) \, d\sigma_1, \qquad (6,12)$$

где интегрирование распространяется по фиксированной для всех x_1, x_2, x_3, t сфере S_1:

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \quad d\sigma_1 = \frac{d\sigma_t}{t^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\varphi(x_1+t\beta_1,\ x_2+t\beta_2,\ x_3+t\beta_3)\,d\sigma_1+$$
$$+\frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\sum_{k=1}^{3}\beta_k\varphi_k(x_1+t\beta_1,\ x_2+t\beta_2,\ x_3+t\beta_3)\,d\sigma_1. \quad (7,12)$$

Здесь φ_k означает производную от φ по α_k. Легко видеть, что первое слагаемое в правой части стремится к $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, когда $t\to 0$, а второе стремится к нулю, потому что входящий в него интеграл остается ограниченным.

Теперь достаточно доказать, что u_φ, определенное по формуле Кирхгофа, удовлетворяет уравнению (1,12). Из равенства (6,12) находим

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_3^2}=\frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_3^2}\right)d\sigma_1=$$
$$=\frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_3^2}\right)d\sigma_t. \quad (8,12)$$

Чтобы вычислить $\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}$, перепишем равенство (7,12) так:

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}=\frac{u_\varphi}{t}+\frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}d\alpha_2\,d\alpha_3+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2}d\alpha_1\,d\alpha_3+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_3}d\alpha_1\,d\alpha_2\right)=$$
$$=\frac{u_\varphi}{t}+\frac{1}{4\pi t}\iiint\limits_{V_t}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_3^2}\right)d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3=$$
$$=\frac{u_\varphi}{t}+\frac{I(t)}{4\pi t}, \quad (9,12)$$

где

$$I(t)=\iiint\limits_{V_t}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_3^2}\right)d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3,$$

а V_t — шар радиуса t с центром в точке (x_1, x_2, x_3) на гиперплоскости $t=0$.

Из формулы (9,12) получаем

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}=-\frac{u_\varphi}{t^2}+\frac{1}{t}\left[\frac{u_\varphi}{t}+\frac{I(t)}{4\pi t}\right]-\frac{I(t)}{4\pi t^2}+\frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I(t)}{\partial t}=$$
$$=\frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I(t)}{\partial t}. \quad (10,12)$$

Но легко видеть, что

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t}=\iint\limits_{S_t}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_3^2}\right)d\sigma_t\,^{*}). \qquad (11,12)$$

Сравнивая равенства (8,12), (10,12) и (11,12), легко убедиться, что функция u, определяемая формулой Кирхгофа, действительно удовлетворяет волновому уравнению (1,12).

Замечание. Если функция $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ только непрерывна, а $\varphi_0(x_1, x_2, x_3)$ непрерывна вместе со своими первыми производными, то функция u, определенная равенствами (4,12), (5,12), дает только обобщенное решение задачи Коши. При этом под обобщенным решением задачи Коши для уравнения (1,12) с начальными условиями (2,12) мы понимаем предел равномерно сходящейся последовательности решений $u_{(n)}(t, x_1, x_2, x_3)$ уравнения (1,12) с начальными условиями

$$u_{(n)}(0, x_1, x_2, x_3)=\varphi_{0(n)}(x_1, x_2, x_3),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}u_{(n)}(0, x_1, x_2, x_3)=\varphi_{1(n)}(x_1, x_2, x_3),$$

если при $n\longrightarrow\infty$ последовательности $\varphi_{0(n)}$, $\frac{\partial\varphi_{0(n)}}{\partial x_i}$, $\varphi_{1(n)}$ равномерно в G_0 сходятся соответственно к φ_0, $\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_i}$, φ_1. Легко видеть, что если $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ непрерывна, а φ_0 — непрерывно дифференцируема, то обобщенное решение задачи Коши с начальными условиями (2,12) существует и единственно.

2. Рассмотрим частный случай, когда функция φ не зависит от x_3. Легко видеть, что тогда функция u, даваемая формулой Кирхгофа, также не будет зависеть от x_3

---

*) В самом деле, переходя к полярным координатам (ρ, θ, ψ) с центром в точке (x_1, x_2, x_3), имеем

$$I(t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\Delta\varphi(r, \psi, \theta)\,r^2\sin\theta\,d\psi\,d\theta\,dr,$$

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t}=\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\Delta\varphi(t, \psi, \theta)\,t^2\sin\theta\,d\psi\,d\theta=\iint\limits_{S_t}\Delta\varphi\,d\sigma_t.$$

и поэтому будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \qquad (12,12)$$

В этом случае можно интеграл по сфере S_t заменить удвоенным интегралом по сечению K_t шара V_t плоскостью $\alpha_3=x_3$. Проектируя элемент $d\sigma_t$ поверхности на эту плоскость, получаем

$$d\sigma_t=\frac{t}{\sqrt{t^2-(\alpha_1-x_1)^2-(\alpha_2-x_2)^2}}\,d\alpha_1\,d\alpha_2,$$

и формула Кирхгофа переписывается следующим образом:

$$u_\varphi(t,\ x_1,\ x_2)=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_t}\frac{\varphi(\alpha_1,\ \alpha_2)}{t}\,d\sigma_t=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{K_t}\frac{\varphi(\alpha_1,\ \alpha_2)\,d\alpha_1\,d\alpha_2}{\sqrt{t^2-(\alpha_1-x_1)^2-(\alpha_2-x_2)^2}}.$$

Поэтому решение уравнения (12,12), удовлетворяющее условиям

$$u(0,\ x_1,\ x_2)=\varphi_0(x_1,\ x_2),$$
$$u_t'(0,\ x_1,\ x_2)=\varphi_1(x_1,\ x_2),$$

дается формулой

$$u(t,\ x_1,\ x_2)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{K_t}\frac{\varphi_1(\alpha_1,\ \alpha_2)\,d\alpha_1\,d\alpha_2}{\sqrt{t^2-(\alpha_1-x_1)^2-(\alpha_2-x_2)^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{K_t}\frac{\varphi_0(\alpha_1,\ \alpha_2)\,d\alpha_1\,d\alpha_2}{\sqrt{t^2-(\alpha_1-x_1)^2-(\alpha_2-x_2)^2}}. \qquad (13,12)$$

Эта формула называется *формулой Пуассона.*

3. Если функция φ не зависит ни от x_2, ни от x_3, то функция u, даваемая формулой Кирхгофа, также не зависит ни от x_2, ни от x_3, и потому удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}. \qquad (14,12)$$

В этом случае формулу Кирхгофа можно переписать так:

$$u_\varphi(t,\ x_1)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_t}\frac{\varphi(\alpha_1)}{t}\,d\sigma_t=\frac{1}{2}\int\limits_{x_1-t}^{x_1+t}\varphi(\alpha_1)\,d\alpha_1.$$

Мы воспользовались здесь тем, что площадь части сферы S_t, заключенная между пересекающими эту сферу плоскостями $\alpha_1 = \text{const}$ и $\alpha_1 + d\alpha_1 = \text{const}$, равна $2\pi t\, d\alpha_1$ *), а функция $\varphi(\alpha_1)$ на всей этой части сферы сохраняет постоянное значение с точностью до величин порядка $d\alpha_1$.

Поэтому решение уравнения (14,12), удовлетворяющее условиям

$$u(0, x_1) = \varphi_0(x_1), \qquad u'_t(0, x_1) = \varphi_1(x_1),$$

дается формулой

$$u(t, x_1) = \frac{1}{2}\int_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi_1(\alpha_1)\, d\alpha_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi_0(\alpha_1)\, d\alpha_1 =$$
$$= \frac{\varphi_0(x_1+t) + \varphi_0(x_1-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi_1(\alpha_1)\, d\alpha_1. \quad (15,12)$$

Эта формула называется *формулой Даламбера*.

Напомним, что согласно теореме о единственности, доказанной в § 11, других решений задачи Коши, кроме тех, которые даются для уравнений (1,12), (12,12), (14,12) соответственно формулами (4,12), (13,12), (15,12), нет. Тот метод, которым мы получили решение задачи Коши для уравнений (12,12), (14,12) из решения задачи Коши для уравнения (1,12), называется *методом спуска*.

Мы нашли решение задачи Коши при $t > 0$. Случай $t < 0$ сводится к предыдущему заменой t на $-t$, отчего уравнения (1,12), (12,12), (14,12) не изменяются.

Задача 1. Пусть $\bar{u}(t, x_1, x_2, x_3; \tau)$ есть решение уравнения (1,12), удовлетворяющее при $t = \tau$ условиям

$$\bar{u}(\tau, x_1, x_2, x_3; \tau) = 0,$$
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(\tau, x_1, x_2, x_3; \tau) = f(\tau, x_1, x_2, x_3).$$

---

*) Площадь шарового пояса малой ширины $d\alpha$ приближенно равна $2\pi\rho\, dl$, где ρ — радиус среднего сечения пояса, а dl — образующая вписанного в этот пояс усеченного конуса. Но $\frac{t}{\rho} = \frac{dl}{d\alpha}$, откуда $\rho\, dl = t\, d\alpha$ и $d\sigma_t = 2\pi t\, d\alpha$.

Доказать, что решение $u(t, x_1, x_2, x_3)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(t, x_1, x_2, x_3),$$

удовлетворяющее при $t=0$ условиям

$$u(0, x_1, x_2, x_3) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

дается формулой

$$u(t, x_1, x_2, x_3) = \int_0^t \bar{u}(t, x_1, x_2, x_3; \tau)\, d\tau. \qquad (16,12)$$

Задача 2. Пользуясь формулой (5,12), покажите, что решение (16,12) имеет вид

$$u(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant t} \frac{f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t-r)}{r}\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3, \qquad (17,12)$$

где $r = \sqrt{(x_1-\alpha_1)^2 + (x_2-\alpha_2)^2 + (x_3-\alpha_3)^2}$. Интеграл (17, 12) называется *запаздывающим потенциалом.*

§ 13. Исследование формул, дающих решение задачи Коши

1. Непрерывная зависимость решения от начальных данных. Все выведенные нами в предыдущем параграфе формулы, дающие решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \qquad (1,13)$$

при $n=2$, 3, содержат интегралы от начальных функций, умноженных на определенные функции, и производные по времени от таких интегралов. При $n=1$ эти формулы содержат только интегралы от начальных функций и сами начальные функции.

Поэтому, если изменить начальные функции φ_0 и φ_1 так, чтобы при этом и они сами и их первые производные достаточно мало изменились, то при этом мало изменится и