

Доказать, что решение $u(t, x_1, x_2, x_3)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(t, x_1, x_2, x_3),$$

удовлетворяющее при $t=0$ условиям

$$\begin{aligned} u(0, x_1, x_2, x_3) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, x_2, x_3) &= 0, \end{aligned}$$

дается формулой

$$u(t, x_1, x_2, x_3) = \int_0^t \bar{u}(t, x_1, x_2, x_3; \tau) d\tau. \quad (16,12)$$

Задача 2. Пользуясь формулой (5,12), покажите, что решение (16,12) имеет вид

$$u(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{r \leq t} \frac{f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t-r)}{r} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3, \quad (17,12)$$

где $r = \sqrt{(x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 + (x_3 - \alpha_3)^2}$. Интеграл (17, 12) называется *запаздывающим потенциалом*.

§ 13. Исследование формул, дающих решение задачи Коши

1. Непрерывная зависимость решения от начальных данных. Все выведенные нами в предыдущем параграфе формулы, дающие решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (1,13)$$

при $n=2, 3$, содержат интегралы от начальных функций, умноженных на определенные функции, и производные по времени от таких интегралов. При $n=1$ эти формулы содержат только интегралы от начальных функций и сами начальные функции.

Поэтому, если изменить начальные функции φ_0 и φ_1 так, чтобы при этом и они сами и их первые производные достаточно мало изменились, то при этом мало изменится и

функция $u(t, x_1, \dots, x_n)$, дающая решение задачи Коши. При $n=1$ для этого достаточно, чтобы мало изменились только сами функции φ_0 и φ_1 . При этом предполагается, конечно, что рассматриваются только ограниченные значения t , если область, в которой задаются начальные функции, бесконечна.

Таким образом, устанавливается, что *задача Коши для уравнений (1,12), (12,12), (14,12) поставлена корректно.*

Можно вывести формулы, дающие решение задачи Коши для уравнения (1,13) при любом n , аналогичные формулам (4,12), (13,12), (15,12), и убедиться, что и для этого уравнения задача Коши поставлена корректно, если начальные условия задавать при $t=0$ *). Числа L_1 и L_2 , входящие в определение корректности (ср. § 8), соответственно равны $\left[\frac{n}{2}\right] + 2$ и $\left[\frac{n}{2}\right]$; здесь $[x]$ означает целую часть от x .

Из формул (4,12) и (13,12) следует, что при небольших t величина $|u(t, x_1, x_2, x_3)|$, соответственно $|u(t, x_1, x_2)|$, может быть очень большой, несмотря на малость φ_0 и φ_1 , если производные от функции φ_0 велики. Могут образоваться «всплески» волны.

2. Диффузия волн. Формулы (4,12) и (5,12) показывают, что значение в точке (t, x_1, \dots, x_n) решения задачи Коши для волнового уравнения (1,13) при $n=3$ зависит от начальных данных только на границе основания характеристического конуса с вершиной в точке (t, x_1, x_2, x_3) . Если же $n=1$ или $n=2$, то $u(t, x_1, \dots, x_n)$ зависит от начальных данных на всем основании этого конуса, как показывают формулы (13,12) и (15,12).

Допустим, что начальные значения u и u'_i при $t=0$ отличаются от нуля только внутри малой области G_ε , около некоторой точки $(0, x_1^0, \dots, x_n^0)$. Будем следить за значениями u в точках (t, x_1, \dots, x_n) при фиксированных x_1, \dots, x_n и при увеличивающемся, начиная от нуля, t . При $n=3$ величина $u(t, x_1, \dots, x_n)$ может отличаться от нуля только на небольшом участке рассматриваемой в пространстве (t, x_1, \dots, x_n) прямой, параллельной оси Ot , именно на том, где расположены вершины характеристических кону-

*) Эти формулы можно, например, вывести методом, изложенным в «Курсе высшей математики» В. И. Смирнова, т. II, § 173, Физматгиз, 1958.

сов уравнения (1,12), границы оснований которых пересекают область G_s . Если же $n=1$ или $n=2$ и точка $(0, x_1)$, соответственно $(0, x_1, x_2)$, не принадлежит G_s , то $u(t, x_1)$, соответственно $u(t, x_1, x_2)$, равно нулю при достаточно малых t , а начиная с тех значений t , при которых отрезок $|x_1 - \alpha_1| \leq t$, соответственно круг $(\alpha_1 - x_1)^2 + (\alpha_2 - x_2)^2 \leq t^2$, пересечет область G_s , будет уже, вообще говоря, отличным от нуля.

Следовательно, возмущение, произведенное в начальный момент в некоторой малой окрестности точки (x_1^0, \dots, x_n^0) , при $n=3$ и $t > 0$ отзывается на значениях функции только в тех точках пространства (x_1, \dots, x_n) , которые лежат *около* сферы радиуса t с центром в точке (x_1^0, \dots, x_n^0) . Таким образом, от возмущения, произведенного в начальный момент в точке (x_1^0, x_2^0, x_3^0) , возникает сферическая волна с центром в этой точке, имеющая *передний* и *задний фронт*. Если же $n=1$ или $n=2$, то возмущение, произведенное в начальный момент в окрестности точки (x_1^0, \dots, x_n^0) , отзывается, вообще говоря, *на всех точках, лежащих внутри сферы* радиуса t с центром в (x_1^0, \dots, x_n^0) . Возникает волна, имеющая резкий передний край и размытый задний. Говорят, что в этом случае происходит диффузия (размыв заднего фронта) волны. При $n=3$ не бывает диффузии. Можно показать, что диффузии волн не бывает для решений уравнения (1,13) при любом нечетном $n \geq 3$.

Возмущения, произведенные в малой области G_s трехмерного упругого твердого тела или газа, вызывают волны, не оставляющие после себя никакого следа, если предположить, что колебания их подчиняются уравнению (1,12); в случае газа $u(t, x_1, x_2, x_3)$ означает, например, отклонение от нормального давления газа в точке (x_1, x_2, x_3) в момент t . Возмущения же двумерного континуума, например натянутой мембраны или поверхности воды, произведенные в малой области G_s , вызывают волны, теоретически всегда оставляющие после себя след, если предположить, что эти колебания подчиняются уравнению (12,12). Практически эти колебания очень быстро затухают вследствие наличия трения, которое не учитывается при выводе уравнения (12,12). Точно так же, вообще говоря, остается след при прохождении волны в одномерном континууме (ср. п. 3 настоящего параграфа).

3. Исследование формулы Даламбера. Рассмотрим два частных случая, которые дают ясное представление о поведении решения уравнения (14,12) в общем случае.

Сначала рассмотрим случай, когда $\varphi_1(x) \equiv 0$, а график $\varphi_0(x)$ имеет вид, изображенный на верхнем рис. 3 (сплошная жирная линия). Мы будем вместо x_1 для краткости писать x . Тогда формула Даламбера примет вид

$$u(t, x) = \frac{\varphi_0(x+t) + \varphi_0(x-t)}{2}.$$

Для того чтобы получить график $u(t, x)$, рассматриваемой как функция от x , при каком-нибудь фиксированном положительном t , удобно поступить так: сначала начертить два одинаковых совпадающих графика, каждый из которых получается из графика $\varphi_0(x)$ уменьшением вдвое ординат (пунктир на верхнем рис. 3). Потом один из этих графиков передвинуть, как целое, на t вправо по направлению положительной части оси x , а другой — на t влево. После этого надо построить новый график, у которого ордината при каждом значении x равна сумме ординат при этом x двух передвинутых графиков. На чертежах этим способом построены примерные графики

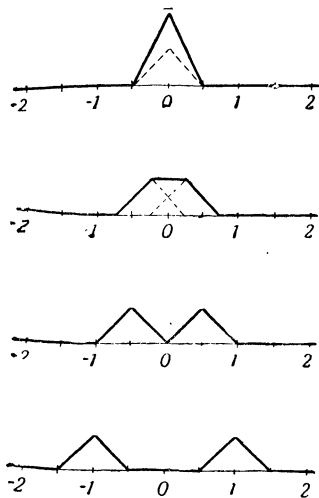


Рис. 3.

$$u(0, x), u\left(\frac{1}{4}, x\right),$$

$$u\left(\frac{1}{2}, x\right), u(1, x)$$

(пунктиром везде начерчены вспомогательные графики, сплошной жирной линией — графики $u(t, x)$ при фиксированном t).

Рассмотрим теперь случай, когда $\varphi_0(x) \equiv 0$, а

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Тогда формула Даламбера примет вид

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(\alpha) d\alpha.$$

Для каждого фиксированного x будет $u(t, x) = 0$ до тех пор, пока интервал $(x-t, x+t)$ не захватит интервала $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, где $\varphi_1(x) \neq 0$; $u(t, x)$ будет изменяться в течение того промежутка времени, пока увеличивающийся интервал $(x-t, x+t)$ будет покрывать все большую часть интервала $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. После того, как интервал $(x-t, x+t)$ заключит внутри себя весь интервал $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, величина $u(t, x)$ будет оставаться неизменно равной

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi_1(\alpha) d\alpha.$$

Чтобы получить график, представляющий форму струны при различных t , удобно поступить следующим образом.

Обозначим через $\Phi(z)$ какую-то первообразную функцию для $\varphi_1(z)$. Тогда

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\Phi(x+t) - \Phi(x-t)].$$

Чтобы получить график $u(t, x)$, вычертим графики функций $\frac{1}{2}\Phi(x)$ и $-\frac{1}{2}\Phi(x)$, а затем каждый из этих графиков передвинем, как целое, на расстояние t вдоль оси Ox ; первый — влево, а второй — вправо. Сложив ординаты сдвинутых графиков, мы получим график функции $u(t, x)$.

На рис. 4 показана форма струны в моменты $t=0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$.

Явление диффузии здесь выражается в том, что точка x , выйдя из положения равновесия, больше к нему не возвращается.

Функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$, рассмотренные в предыдущих примерах, или сами имеют разрывы ($\varphi_1(x)$), или разрывы имеют их производные ($\varphi_0(x)$). Поэтому им соответствуют обобщенные решения уравнения (14,12). Чтобы получить обычное дважды непрерывно дифференцируемое решение этого уравнения, достаточно немного изменить графики функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ так, чтобы получились графики функций

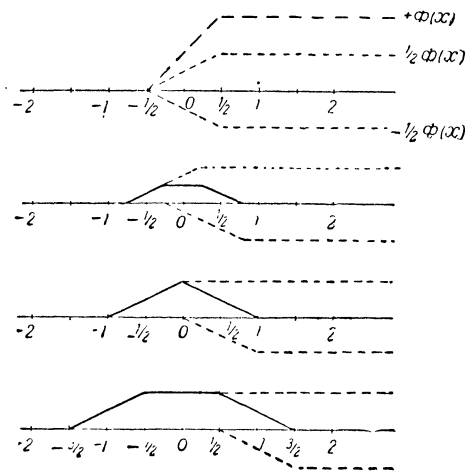


Рис. 4.

с непрерывной второй производной. Для функции φ_0 это можно сделать так, чтобы ордината $\varphi_0(x)$ всюду изменилась мало. Тогда и соответствующее решение уравнения (14, 12) всюду мало изменится. При замене $\varphi_1(x)$ непрерывной гладкой функцией это можно сделать так, чтобы $\Phi(x)$ изменилась сколь угодно мало. При этом также $u(t, x)$ всюду мало изменится.

§ 14. Преобразования Лоренца

1. В § 1 мы упоминали о том, что выражение $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ есть единственная с точностью до постоянного множителя линейная комбинация вторых производных, не меняющая вида при вращении пространства, т. е. при