Функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$, рассмотренные в предыдущих примерах, или сами имеют разрывы ($\varphi_1(x)$), или разрывы имеют их производные ($\varphi_0(x)$). Поэтому им соответствуют обобщенные решения уравнения (14,12). Чтобы получить обычное дважды непрерывно дифференцируемое решение этого уравнения, достаточно немного изменить графики функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ так, чтобы получились графики функций

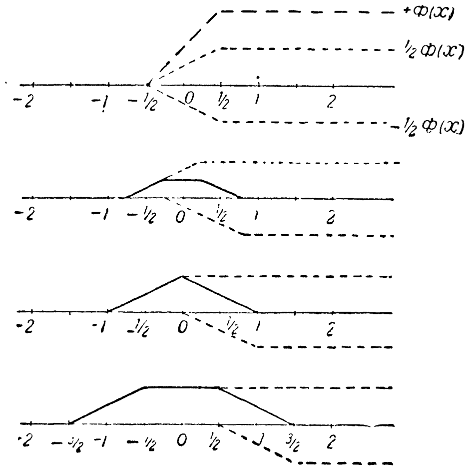

Рис. 4.

с непрерывной второй производной. Для функции φ_0 это можно сделать так, чтобы ордината $\varphi_0(x)$ всюду изменилась мало. Тогда и соответствующее решение уравнения (14, 12) всюду мало изменится. При замене $\varphi_1(x)$ непрерывной гладкой функцией это можно сделать так, чтобы $\Phi(x)$ изменилась сколь угодно мало. При этом также $u(t, x)$ всюду мало изменится.

§ 14. Преобразования Лоренца

1. В § 1 мы упоминали о том, что выражение $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ есть единственная с точностью до постоянного множителя линейная комбинация вторых производных, не меняющая вида при вращении пространства, т. е. при

любом ортогональном преобразовании координат x_1, x_2, x_3. С волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0 \qquad (1,\ 14)$$

также тесно связан некоторый класс линейных преобразований переменных $(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$ с действительными постоянными коэффициентами, не меняющих вида этого уравнения. Рассмотрим их подробнее.

Преобразованием Лоренца переменных x_0, x_1, x_2, x_3 называется всякое линейное однородное преобразование этих переменных с действительными коэффициентами вида

$$y_i=\sum_{j=0}^{3}a_{ij}x_j \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ 3), \qquad (2,14)$$

при котором квадратичная форма

$$x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2 \qquad (3,14)$$

остается неизменной, т. е. имеет в новых переменных вид

$$y_0^2-y_1^2-y_2^2-y_3^2.$$

Легко проверить, что совокупность всех преобразований Лоренца образует группу, у которой групповой операцией является суперпозиция преобразований (подстановок). В частности, легко видеть, что последовательное применение двух преобразований Лоренца всегда дает также преобразование Лоренца.

Напишем формулу для некоторого частного класса преобразований Лоренца. Рассмотрим преобразование, оставляющее неизменными две из трех последних (пространственных) координат. Такое преобразование имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= ax_0+bx_1, \\ y_1 &= cx_0+dx_1, \\ y_2 &= x_2, \\ y_3 &= x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (4,14)$$

При этом преобразовании должно выполняться тождество

$$y_0^2-y_1^2\equiv x_0^2-x_1^2.$$

Подставляя y_0 и y_1 из формул (4,14), имеем

$$(ax_0 + bx_1)^2 - (cx_0 + dx_1)^2 \equiv x_0^2 - x_1^2.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} a^2 - c^2 &= 1, \\ b^2 - d^2 &= -1, \\ ab - cd &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5,14)$$

Эти уравнения, в частности, удовлетворяются, если положить

$$a = d = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad b = c = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где $|\beta| < 1$.

Мы получим при этом формулы для некоторого класса преобразований Лоренца:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \frac{x_0 + \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y_1 &= \frac{\beta x_0 + x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y_2 &= x_2, \\ y_3 &= x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (6,14)$$

Формулы (6,14) являются весьма существенными, так как мы покажем сейчас, что *всякое преобразование Лоренца есть комбинация ортогонального преобразования переменных* x_1, x_2, x_3, *оставляющего* x_0 *неизменным, преобразования вида* (6,14) *и изменения знака у каких-нибудь переменных (отражения).*

Пусть некоторое преобразование Лоренца задано формулами

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3, \\ y_1 &= a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (7,14)$$

Если хотя бы одно из чисел a_{01}, a_{02}, a_{03} не равно нулю, то произведем такое ортогональное преобразование x_1, x_2, x_3 в x_1', x_2', x_3', чтобы выполнялось равенство

$$a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 = ax_1'.$$

Если, кроме того, x_0' положить равным x_0, то, как легко видеть, это преобразование от x_0, x_1, x_2, x_3 к x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 есть преобразование Лоренца. Подставив в правую часть (7,14) переменные x'_0, x'_1, x'_2, x'_3, получим

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= a_{00}x'_0 + ax'_1, \\ y_1 &= a_{10}x'_0 + b_{11}x'_1 + b_{12}x'_2 + b_{13}x'_3, \\ y_2 &= a_{20}x'_0 + b_{21}x'_1 + b_{22}x'_2 + b_{23}x'_3, \\ y_3 &= a_{30}x'_0 + b_{31}x'_1 + b_{32}x'_2 + b_{33}x'_3. \end{aligned}\right\} \tag{8,14}$$

Покажем, что при этом $a^2 < a_{00}^2$. Действительно, так как (8,14) есть преобразование Лоренца, то

$$y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = x_0'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2,$$

откуда

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_0'^2 + y_0^2. \tag{9,14}$$

Положим $y_0 = 0$. Тогда $x'_0 = -\frac{a}{a_{00}}x'_1$ и тождество (9,14) обращается в тождество по трем переменным

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \left(1 - \frac{a^2}{a_{00}^2}\right)x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2.$$

Правая часть положительна при любых x'_1, x'_2, x'_3, если $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 > 0$, так как из $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ следует, что $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Поэтому должно быть

$$1 - \frac{a^2}{a_{00}^2} > 0,$$

т. е. $a^2 < a_{00}^2$.

Положим $\frac{a}{a_{00}} = \beta$ и произведем преобразование Лоренца вида (6,14)

$$\left.\begin{aligned} x''_0 &= \frac{x'_0 + \beta x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ x''_1 &= \frac{\beta x'_0 + x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ x''_2 &= x'_2, \\ x''_3 &= x'_3. \end{aligned}\right\} \tag{10,14}$$

Очевидно, y_0, y_1, y_2, y_3 будут связаны с x''_0, x''_1, x''_2, x''_3

преобразованием Лоренца, имеющим вид

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= cx''_0, \\ y_1 &= c_{10}x''_0 + c_{11}x''_1 + c_{12}x''_2 + c_{13}x''_3, \\ y_2 &= c_{20}x''_0 + c_{21}x''_1 + c_{22}x''_2 + c_{23}x''_3, \\ y_3 &= c_{30}x''_0 + c_{31}x''_1 + c_{32}x''_2 + c_{33}x''_3, \end{aligned}\right\} \qquad (11,14)$$

где, как легко подсчитать, $c = \pm\sqrt{a_{00}^2 - a^2}$.

Если $a_{01} = a_{02} = a_{03} = 0$, то уже система (7,14) имеет вид (11,14).

Найдем значения коэффициентов c, c_{10}, c_{20}, c_{30}.

Полагая $x''_0 = 1$, $x''_1 = x''_2 = x''_3 = 0$, получим

$$y_0 = c, \ y_1 = c_{10}, \ y_2 = c_{20}, \ y_3 = c_{30}.$$

Отсюда $1 = c^2 - c_{10}^2 - c_{20}^2 - c_{30}^2$ и $c^2 \geqslant 1$.

Полагая $y_0 = 1$, $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, найдем, что $x''_0 = \frac{1}{c}$, а x''_1, x''_2, x''_3 имеют некоторые определенные значения $\breve{x}''_1$, $\breve{x}''_2$, $\breve{x}''_3$. Отсюда

$$1 = \frac{1}{c^2} - \breve{x}''^2_1 - \breve{x}''^2_2 - \breve{x}''^2_3 \quad \text{и} \quad \frac{1}{c^2} \geqslant 1,$$

т. е. $c^2 \leqslant 1$.

Следовательно, $c^2 = 1$ и, возвращаясь опять к равенству

$$1 = c^2 - c_{10}^2 - c_{20}^2 - c_{30}^2,$$

мы видим, что $c_{10} = c_{20} = c_{30} = 0$. Следовательно, преобразование (11,14) имеет на самом деле вид

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \pm x''_0, \\ y_1 &= \qquad c_{11}x''_1 + c_{12}x''_2 + c_{13}x''_3, \\ y_2 &= \qquad c_{21}x''_1 + c_{22}x''_2 + c_{23}x''_3, \\ y_3 &= \qquad c_{31}x''_1 + c_{32}x''_2 + c_{33}x''_3. \end{aligned}\right\} \qquad (12,14)$$

Изменив, если нужно, знак у координаты x''_0, мы получим преобразование Лоренца, которое есть просто ортогональное преобразование переменных x''_1, x''_2, x''_3 в y_1, y_2, y_3.

Мы видим, таким образом, что самое общее преобразование Лоренца (7,14), переводящее переменные x_i в y_i, есть результат последовательных преобразований: ортогонального, переводящего x_i в x'_i; преобразования Лоренца частного вида (6,14), переводящего x'_i в x''_i; может быть, изменения знака у x''_0 и, наконец, ортогонального преобразования x''_i в y_i, $i=1, 2, 3$.

Если транспонировать матрицу каждого из этих промежуточных преобразований, то мы снова получим матрицу преобразования такого же типа. Отсюда следует, что *матрица, транспонированная к матрице преобразования Лоренца, снова есть матрица преобразования Лоренца.* Из определения преобразования Лоренца следует также, что преобразование, обратное к лоренцеву, также является лоренцевым.

2. Докажем теперь основной факт, выясняющий тесную связь преобразований Лоренца с волновым уравнением.

Теорема. *Всякое неособое линейное преобразование переменных t, x_1, x_2, x_3 с действительными постоянными коэффициентами, которое не меняет вида уравнения* (1,14), *есть комбинация преобразования Лоренца, переноса начала координат в пространстве* (t, x_1, x_2, x_3) *и преобразования подобия в этом пространстве.*

Для упрощения записи положим $t=x_0$.

Утверждение, что некоторое преобразование «не меняет вида уравнения», мы понимаем следующим образом: любая функция $u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ (с непрерывными вторыми производными), удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0,$$

после преобразования x_i в y_i переходит в функцию $u(y_0, y_1, y_2, y_3)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2}=0. \qquad (13,14)$$

Отсюда следует, что при любом таком преобразовании для произвольной функции $u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ имеет место равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right), \qquad (14,14)$$

где $k\neq 0$ — некоторая постоянная. В самом деле, если сделать наиболее общее предположение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2} \equiv \sum_{i,j=0}^{3} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (15,14)$$

и допустить, что

$$\sum_{i,j=0}^{3} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \neq k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right),$$

то мы придем к противоречию с тем фактом, что всякое решение уравнения (1,14) переходит при преобразовании переменных в решение такого же уравнения. Действительно, в этом случае можно подобрать систему таких чисел $u^0_{ik} = u^0_{ki}$, чтобы они удовлетворяли двум линейным уравнениям:

$$\sum_{i,j=0}^{3} A_{ij} u^0_{ij} = 1, \qquad (16,14)_1$$

$$u^0_{00} - u^0_{11} - u^0_{22} - u^0_{33} = 0. \qquad (16,14)_2$$

Для функции $u(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{3} u^0_{ij} x_i x_j$ имеют место равенства

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u^0_{ij}.$$

В силу $(16,14)_2$ эта функция удовлетворяет уравнению (1,14), а после преобразования переменных она не будет удовлетворять уравнению (13,14), как следует из $(16,14)_1$ и (15,14). Следовательно, справедливо (14,14).

Произведем преобразование подобия

$$x'_i = x_i \frac{1}{\sqrt{|k|}} \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3);$$

тогда

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) = \pm \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3'^2} \right).$$

Следовательно, нам достаточно показать, что преобразование

$$y_i = \sum_{j=0}^{3} a_{ij} x'_j \qquad (i = 0, \ldots, 3), \qquad (17,14)$$

не меняющее модуль дифференциального выражения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3'^2}, \qquad (18,14)$$

есть преобразование Лоренца, т. е. оно не меняет вида квадратичной формы

$$x_0'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2. \qquad (19,14)$$

Но это следует из того, что, как было показано в § 5, при линейном преобразовании независимых переменных вида (17,14) выражение

$$\sum_{i,j=0}^{3} c_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i' \partial x_j'}$$

преобразуется так же, как преобразуется квадратичная форма от этих переменных

$$\sum_{i,j=0}^{3} c_{ij} x_i' x_j',$$

если над ними совершить преобразование

$$x_j' = \sum_{i=0}^{3} a_{ij} y_i \qquad (j = 0, \ldots, 3). \qquad (20,14)$$

Так как преобразование (17,14) с точностью до знака не меняет вида выражения (18,14), то преобразование (20,14) с точностью до знака не меняет вида квадратичной формы (19,14). Но в силу закона инерции и знак (19,14) ни при каком линейном преобразовании с действительными коэффициентами измениться не может, поэтому преобразование (20,14) и обратное к нему суть преобразования Лоренца. Согласно установленному в п. 1, тогда и исходное преобразование (17,14) есть преобразование Лоренца, так как его матрица есть транспонированная к матрице преобразования Лоренца (20,14).

Таким образом, мы показали, что всякое однородное линейное преобразование, не меняющее вида уравнения (1,14), есть комбинация преобразования подобия и преобразования Лоренца. Так как очевидно, что перенос начала координат также не меняет вида этого уравнения, то теорема полностью доказана.

3. Ортогональным преобразованием переменных x_1, x_2, x_3 мы можем перевести любую проходящую через начало координат гиперплоскость в пространстве t, x_1, x_2, x_3, наклоненную к Ot под углом, бо́льшим 45° (и только такую), в гиперплоскость

$$t=\beta x_1, \quad \text{где} \quad |\beta|<1 \text{ *)},$$

а преобразование Лоренца (6,14) дает возможность перевести эту гиперплоскость в координатную гиперплоскость $t^*=0$. Таким образом, мы всегда можем линейным преобразованием независимых переменных, не изменяющим вида уравнения (1,14), перевести любую гиперплоскость в пространстве (t, x_1, x_2, x_3), наклоненную к оси Ot под углом, бо́льшим 45°, в гиперплоскость $t=0$. Тем самым мы получаем возможность решить задачу Коши для уравнения (1,14), задавая начальные данные не только на гиперплоскости $t=0$, но и на любой гиперплоскости П, составляющей с осью Ot угол, бо́льший 45°, или, что все равно, на гиперплоскости П, пересекающей каждый из характеристических конусов уравнения (1,14) только по одной его поле или в одной только его вершине. Действительно, задавая в какой-либо области G_0, находящейся на П, функцию u и ее производную по какому-нибудь направлению, выходящему из плоскости П, мы тем самым задаем в области G_0 первые производные от u по любым направлениям в пространстве (t, x_1, x_2, x_3), так как знание функции u в области G_0 дает нам знание в этой области ее первых производных по всем направлениям, лежащим в G_0. Преобразуя же гиперплоскость П

---

*) Пусть уравнение такой гиперплоскости задано в виде $At+Bx_1+Cx_2+Dx_3=0$, где $B^2+C^2+D^2=1$. Тогда косинус угла α_0 нормали к гиперплоскости с осью Ot равен $\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}$, а тангенс этого угла равен $\frac{1}{A}$. Если нормаль к гиперплоскости составляет с осью Ot угол, меньший 45°, то преобразование

$$Bx_1+Cx_2+Dx_3=x_1'$$

при соответственно выбранных (из условий ортогональности преобразования) x_2' и x_3' преобразует данную гиперплоскость в гиперплоскость вида

$$At+x_1'=0 \quad \text{или} \quad t=-\frac{1}{A}x_1', \quad \text{где} \quad \left|\frac{1}{A}\right|<1.$$

в гиперплоскость $t^*=0$, мы сводим решение задачи Коши при начальных данных на П к задаче Коши, рассмотренной в § 12.

С другой стороны, легко показать, что задача Коши для уравнения (1,14) будет некорректно поставлена, если начальные условия задавать на гиперплоскости П, наклоненной в пространстве t, x_1, ..., x_n к оси Ot под углом, не превышающим 45°.

В самом деле, если гиперплоскость П составляет с Ot угол в 45°, то она имеет характеристическое направление и потому на ней нельзя задавать произвольно условия Коши, какой бы гладкости мы ни требовали от них.

Рассмотрим теперь случай, когда П составляет с Ot угол, меньший 45°. Ортогональным преобразованием координат в пространстве (x_1, x_2, x_3) и параллельным их переносом всегда можно достигнуть того, чтобы гиперплоскость П имела уравнение

$$\beta t' + x_1' = 0, \quad \text{где} \quad |\beta| < 1.$$

При этом, как уже отмечалось, вид уравнения (1,14) не изменится. Воспользовавшись далее преобразованием Лоренца, можно достигнуть того, чтобы гиперплоскость П получила уравнение

$$x_1^* = 0,$$

причем уравнение (1,14) не изменится.

Зададим на гиперплоскости $x_1^*=0$ следующие условия Коши:

$$\left.\begin{aligned} u(t^*, 0, x_2^*, x_3^*) &= \varphi_0(x_2^*), \\ u'_{x_1^*}(t^*, 0, x_2^*, x_3^*) &= \varphi_1(x_2^*). \end{aligned}\right\} \qquad (21,14)$$

Если мы найдем решение $u(x_1^*, x_2^*)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^{*2}} = 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$\left.\begin{aligned} u(0, x_2^*) &= \varphi_0(x_2^*), \\ u'_{x_1^*}(0, x_2^*) &= \varphi_1(x_2^*), \end{aligned}\right\} \qquad (22,14)$$

то функция $u(x_1^*, x_2^*)$ будет удовлетворять уравнению (1,14) и условиям (21,14). Если мы за начальные условия (22,14) возьмем условия $(2,8)_1$, $(2,8)_2$, которые были использованы в примере, построенном Адамаром, то легко получить некорректность постановки задачи Коши для уравнения (1,14) с начальными условиями на гиперплоскости $x_1 = 0$.

§ 15. Математические основы специальной теории относительности

Специальный принцип относительности состоит в том, что во всех инерциальных системах отсчета *) все законы природы имеют одинаковую форму. Точнее, в каждой из этих систем отсчета все законы природы можно записать одинаковыми уравнениями. В частности, в каждой из этих систем отсчета скорость света одинакова и притом не зависит от направления распространения света. Для простоты записи мы будем предполагать, что она равна 1.

Система отсчета называется инерциальной, если в этой системе всякое тело при отсутствии внешних сил движется прямолинейно и равномерно. Из этого определения следует, что система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно какой-либо инерциальной системы отсчета, также является инерциальной, и, обратно, любые две инерциальные системы движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно.

Нашей целью является нахождение связи между пространственно-временными координатами для двух инерциальных систем отсчета A' и A'', одна из которых A'' движется равномерно и прямолинейно со скоростью β, по абсолютной величине меньшей 1, относительно другой системы отсчета A'.

В силу предполагаемой однородности и изотропности пространства и времени мы будем считать, что искомая связь линейна и ее коэффициенты зависят только от β. Пространственно-временные координаты для A' мы будем обозначать (t', x'_1, x'_2, x'_3), а для A'' соответственно $(t'', x''_1, x''_2, x''_3)$. Иногда для простоты записи мы будем писать x'_0 вместо t' и x''_0 вместо t''.

---

*) Системой отсчета называются пространственные координаты, служащие для указания места, и часы, служащие для указания времени.