и условиям (21,14). Если мы за начальные условия (22,14) возьмем условия $(2,8)_1$, $(2,8)_2$, которые были использованы в примере, построенном Адамаром, то легко получить некорректность постановки задачи Коши для уравнения (1,14) с начальными условиями на гиперплоскости $x_1=0$.

§ 15. Математические основы специальной теории относительности

Специальный принцип относительности состоит в том, что во всех инерциальных системах отсчета *) все законы природы имеют одинаковую форму. Точнее, в каждой из этих систем отсчета все законы природы можно записать одинаковыми уравнениями. В частности, в каждой из этих систем отсчета скорость света одинакова и притом не зависит от направления распространения света. Для простоты записи мы будем предполагать, что она равна 1.

Система отсчета называется инерциальной, если в этой системе всякое тело при отсутствии внешних сил движется прямолинейно и равномерно. Из этого определения следует, что система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно какой-либо инерциальной системы отсчета, также является инерциальной, и, обратно, любые две инерциальные системы движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно.

Нашей целью является нахождение связи между пространственно-временными координатами для двух инерциальных систем отсчета A' и A'', одна из которых A'' движется равномерно и прямолинейно со скоростью β, по абсолютной величине меньшей 1, относительно другой системы отсчета A'.

В силу предполагаемой однородности и изотропности пространства и времени мы будем считать, что искомая связь линейна и ее коэффициенты зависят только от β. Пространственно-временные координаты для A' мы будем обозначать (t', x'_1, x'_2, x'_3), а для A'' соответственно $(t'', x''_1, x''_2, x''_3)$. Иногда для простоты записи мы будем писать x'_0 вместо t' и x''_0 вместо t''.

---

*) Системой отсчета называются пространственные координаты, служащие для указания места, и часы, служащие для указания времени.

Итак, пусть

$$x''_i = \sum_{j=0}^{3} a_{ij}(\beta)\, x'_j + \alpha_i \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ 3). \qquad (1,15)$$

Нахождение связи между координатами $(t',\ x'_1,\ x'_2,\ x'_3)$ и $(t'',\ x''_1,\ x''_2,\ x''_3)$ будет основано только на постоянстве скорости света для систем отсчета A' и A''.

Прямолинейное распространение плоской световой волны в пространстве $(x'_1,\ x'_2,\ x'_3)$ мы описываем некоторой непостоянной функцией

$$f(a_0 t' + a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3), \qquad (2,15)$$

поверхности уровня которой с изменением времени t' передвигаются перпендикулярно к плоскости $a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3 = \text{const}$ со скоростью

$$-\frac{a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

по предположению равной 1; $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ здесь постоянные. Отсюда следует, что

$$a_0^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \qquad (3,15)$$

Так как скорость света для системы отсчета A'' в координатах $t'',\ x''_1,\ x''_2,\ x''_3$ также должна быть равной 1, то, переходя от координат x'_i к координатам x''_i, мы найдем, что выражение $a_0 t' + a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3$ перейдет в $a'_0 t'' + a'_1 x''_1 + a'_2 x''_2 + a'_3 x''_3 + b$ и

$$a_0'^2 = a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2. \qquad (4,15)$$

Покажем, что координаты $t'',\ x''_1,\ x''_2,\ x''_3$ получаются из $t',\ x'_1,\ x'_2,\ x'_3$ преобразованием Лоренца и переносом начала координат. Переносом начала мы можем заменить координаты $t'',\ x''_1,\ x''_2,\ x''_3$ на такие координаты $t,\ x_1,\ x_2,\ x_3$, которые связаны с $t',\ x'_1,\ x'_2,\ x'_3$ однородными линейными уравнениями

$$x_i = \sum_{j=0}^{3} a_{ij}(\beta)\, x'_j \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ 3). \qquad (5,15)$$

Пусть теперь функция $f(a_0 x'_0 + a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3)$ переходит в функцию $f(a'_0 x_0 + a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3)$; при этом, если числа $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ удовлетворяют соотношению

$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0$, то a_0', a_1', a_2', a_3' удовлетворяют аналогичному соотношению $a_0'^2 - a_1'^2 - a_2'^2 - a_3'^2 = 0$. Здесь (a_0, a_1, a_2, a_3) — *произвольная* система чисел, удовлетворяющая уравнению (3,15), а a_0', a_1', a_2', a_3' — соответствующая система чисел после преобразования (5,15). Покажем, что отсюда следует, что (5,15) дает преобразование Лоренца для коэффициентов a_i, т. е.

$$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = a_0'^2 - a_1'^2 - a_2'^2 - a_3'^2.$$

Действительно, для преобразования переменных a_i при подстановке (5,15) вообще имеет место формула

$$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \equiv \sum_{i,j=0}^{3} k_{ij}(\beta)\, a_i' a_j'. \tag{6,15}$$

Покажем сначала, что

$$\sum_{i,j=0}^{3} k_{ij}(\beta)\, a_i' a_j' \equiv k(\beta)\,(a_0'^2 - a_1'^2 - a_2'^2 - a_3'^2). \tag{7,15}$$

Действительно, из

$$\sum_{i,j=0}^{3} k_{ij}(\beta)\, a_i' a_j' = 0 \tag{8,15}$$

должно следовать

$$a_0'^2 - a_1'^2 - a_2'^2 - a_3'^2 = 0, \tag{9,15}$$

и обратно, т. е. поверхности в четырехмерном пространстве (a_0', a_1', a_2', a_3'), определенные уравнениями (8,15) и (9,15), должны совпадать между собой. Легко показать, что при этом имеет место формула (7,15). Следовательно,

$$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = k(\beta)\,(a_0'^2 - a_1'^2 - a_2'^2 - a_3'^2).$$

Если рассматривать движение первой системы относительно второй, которое будет происходить со скоростью $-\beta$, то аналогично получим

$$a_0'^2 - a_1'^2 - a_2'^2 - a_3'^2 = k(-\beta)\,(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2),$$

откуда

$$k(\beta) \cdot k(-\beta) = 1.$$

Но, с другой стороны, в силу равноправности обеих систем, $k(\beta) = k(-\beta)$, следовательно, $k(\beta) = \pm 1$.

Так как при преобразовании (5,15) над переменными x_i' переменные a_i также подвергаются линейному преобразованию, то число плюсов и минусов у квадратичной формы от a_i не может измениться. Поэтому $k(\beta)=1$ и форма $a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2$ не должна измениться при преобразовании (5,15). Следовательно, это преобразование переменных a_i есть преобразование Лоренца. Линейное преобразование, которому подвергаются переменные a_i при преобразовании (5,15) над x_i, задается матрицей, обратной и транспонированной к матрице (5,15). Но тогда само преобразование (5,15) также есть преобразование Лоренца (см. конец п. 1 из § 14), что и требовалось доказать.

§ 16. Обзор основных фактов в теории задачи Коши и некоторые исследования для общих гиперболических уравнений

До сих пор мы говорили о задаче Коши для волнового уравнения (1,12). В этом параграфе, не приводя доказательств, мы дадим краткий обзор основных фактов теории задачи Коши для общих гиперболических уравнений. При этом в основном наше внимание будет сосредоточено на линейных уравнениях второго порядка.

1. Линейное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} A_{0i}\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x_i}+\sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+ B_0\frac{\partial u}{\partial t}+Cu+D, \qquad (1,16)$$

где коэффициенты A_{ij}, A_{0i}, B_i, B_0, C и D — функции от t, $x_1, \ldots, x_n$, мы будем называть *t-гиперболическим* в некоторой области G пространства $(t, x_1, \ldots, x_n)$, если выполняется следующее условие. Каждая проходящая через начало координат в действительном пространстве $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ прямая должна пересекать поверхность

$$1=\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t, x_1, \ldots, x_n)\alpha_i\alpha_j+\sum_{i=1}^{n} A_{0i}(t, x_1, \ldots, x_n)\alpha_i \qquad (2,16)$$

в двух действительных различных точках. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$