Так как при преобразовании (5,15) над переменными x_i' переменные a_i также подвергаются линейному преобразованию, то число плюсов и минусов у квадратичной формы от a_i не может измениться. Поэтому $k(\beta)=1$ и форма $a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2$ не должна измениться при преобразовании (5,15). Следовательно, это преобразование переменных a_i есть преобразование Лоренца. Линейное преобразование, которому подвергаются переменные a_i при преобразовании (5,15) над x_i, задается матрицей, обратной и транспонированной к матрице (5,15). Но тогда само преобразование (5,15) также есть преобразование Лоренца (см. конец п. 1 из § 14), что и требовалось доказать.

§ 16. Обзор основных фактов в теории задачи Коши и некоторые исследования для общих гиперболических уравнений

До сих пор мы говорили о задаче Коши для волнового уравнения (1,12). В этом параграфе, не приводя доказательств, мы дадим краткий обзор основных фактов теории задачи Коши для общих гиперболических уравнений. При этом в основном наше внимание будет сосредоточено на линейных уравнениях второго порядка.

1. Линейное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} A_{0i}\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+ B_0\frac{\partial u}{\partial t}+Cu+D, \qquad (1,16)$$

где коэффициенты A_{ij}, A_{0i}, B_i, B_0, C и D — функции от t, $x_1, \ldots, x_n$, мы будем называть *t-гиперболическим* в некоторой области G пространства $(t, x_1, \ldots, x_n)$, если выполняется следующее условие. Каждая проходящая через начало координат в действительном пространстве $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ прямая должна пересекать поверхность

$$1=\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t, x_1, \ldots, x_n)\,\alpha_i\alpha_j+\sum_{i=1}^{n} A_{0i}(t, x_1, \ldots, x_n)\,\alpha_i \qquad (2,16)$$

в двух действительных различных точках. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

удовлетворяют уравнению (2,16), то направление гиперплоскости в пространстве $(t, x_1, \ldots, x_n)$, нормаль к которой параллельна вектору $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, является характеристическим (см. § 3).

Назовем характеристическим конусом уравнения (1,16) в точке $(t^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ такую поверхность K с конической особой точкой при $t=t^0$, $x_i=x_i^0$, что касательная гиперплоскость к K в каждой точке имеет характеристическое направление.

Если

$$F(t, x_1, \ldots, x_n)=0$$

есть уравнение поверхности характеристического конуса (или вообще какой-нибудь характеристической поверхности (см. § 3)), то функция F должна удовлетворять уравнению

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2=\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} A_{0i}\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Для каждой точки $(t^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ области G, где уравнение (1,16) t-гиперболично, имеется расположенный в этой области единственный характеристический конус с вершиной в этой точке, который пересекает каждую гиперплоскость $t=\text{const}$ по некоторой замкнутой поверхности S, если только $|t-t^0|$ достаточно мал. Этот конус вместе с частью гиперплоскости $t=\text{const}$, которая ограничена поверхностью S, ограничивает некоторую область K'.

Если $n=1$, характеристический конус вырождается в две линии l_1 и l_2, выходящие из точки (t^0, x_1^0), а основание этого конуса вырождается в отрезок прямой $t=\text{const}$, заключенный между точками пересечения этой прямой с линиями l_1 и l_2.

2. Существует такое число L, зависящее от n, что при всех имеющих L непрерывных производных функциях $\varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$ и $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$, заданных в некоторой области G_0 гиперплоскости $t=t_0$, существует одно и только одно непрерывное вместе со всеми его производными до 2-го порядка включительно решение t-гиперболического уравнения (1,16), удовлетворяющее условиям

$$\left.\begin{aligned} u(t_0, x_1, \ldots, x_n)&=\varphi_0(x_1, \ldots, x_n),\\ u'_t(t_0, x_1, \ldots, x_n)&=\varphi_1(x_1, \ldots, x_n).\end{aligned}\right\} \qquad (3,16)$$

Это решение определяется единственным образом условиями (3,16) во всякой точке $(t, x_1, \ldots, x_n)$, если основание характеристического конуса с вершиной в этой точке лежит целиком в области G_0. Обозначим через G совокупность всех таких точек $(t, x_1, \ldots, x_n)$.

Если функции $\varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$ и $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$ вместе со всеми их производными до L-го порядка изменятся достаточно мало, то и соответствующее решение задачи Коши изменится мало во всей области G. Таким образом, задача Коши для уравнения (1,16) поставлена корректно.

Для линейных гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами, содержащих только члены со вторыми производными, $L = \left[\frac{n}{2}\right] + 2$; С. Л. Соболев показал, что для общих линейных уравнений второго порядка $L \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 3$; при этом предполагается, что коэффициенты уравнения удовлетворяют некоторым условиям гладкости, которые будут заведомо выполняться, если все коэффициенты уравнения имеют непрерывные производные до порядка $\left[\frac{n}{2}\right] + 2$ включительно *).

3. Мы будем говорить, что для уравнения (1,16) отсутствует диффузия волн в рассматриваемой области G пространства $(t, x_1, \ldots, x_n)$, если значение решения u задачи Коши в вершине $(t, x_1, \ldots, x_n)$ характеристического конуса зависит только от значений $\varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$ и $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$ и их производных на границе основания этого конуса при любом расположении характеристического конуса внутри области G. В противном случае мы будем говорить, что имеется диффузия волн. Адамар **) давно уже показал, что при четном n и при $n = 1$ всегда имеется диффузия волн. Матиссон ***) в 1939 г. исследовал случай $n = 3$. Он нашел, что при $n = 3$ все гиперболические уравнения, у которых отсутствует диффузия волн, с точностью до несущественных преобразований совпадают с уравнением (1,13); все эти уравнения

*) С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950; Матем. сборник 1 (43): 1 (1936), 39—72.

**) Hadamard, Le probléme de Cauchy, Paris, 1932, 209—241.

***) Matisson, Acta Mathematica 71, № 3—4 (1939), 249.

получаются из уравнения (1,13) с помощью следующих простых преобразований:

а) замены независимых переменных,

б) линейной замены функции u,

в) умножения обеих частей уравнения на некоторую функцию от $t, x_1, \ldots, x_n$.

Недавно установлено, что при любом нечетном $n \geqslant 5$ существуют гиперболические уравнения, у которых отсутствует диффузия волн и которые не сводятся к уравнению (1,13) с помощью преобразований указанного вида *).

4. Мы в этом параграфе рассматривали пока только тот случай, когда условия Коши задаются на гиперплоскости $t = \text{const}$. Случай, когда условия Коши задаются на какой-либо кривой поверхности, сводится к этому частному случаю заменой независимых переменных, если только все характеристические конусы с достаточно близкими к этой поверхности вершинами пересекают ее по замкнутым поверхностям $(n-1)$ измерений.

5. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\left(t, x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \ldots \right. \\ \left. \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j}, \ldots \right) \tag{4,16}$$

называется в некоторой области G пространства $(t, x_1, \ldots, x_n)$ *t-гиперболическим* вблизи некоторой функции $u_0(t, x_1, \ldots, x_n)$, заданной в области G, если в этой области будет t-гиперболическим линейное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\substack{i, j=1 \\ j \geqslant i}}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} A_{0j} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j}, \tag{5,16}$$

где A_{ij} суть частные производные от правой части уравнения (4,16) по $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, вычисленные при

$$u \equiv u_0(t, x_1, \ldots, x_n)$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n;\ x_0 = t).$$

*) Stellmacher, Math. Annalen 130:3 (1955), 219—233.

Для нелинейного уравнения (4,16) задача Коши поставлена корректно, если при $t=t_0$ заданы такие условия:

$$u(t_0, x_1, \ldots, x_n)=\varphi_0(x_1, \ldots, x_n),$$
$$u'_t(t_0, x_1, \ldots, x_n)=\varphi_1(x_1, \ldots, x_n),$$

что уравнение (5,16) будет t-гиперболическим вблизи функции $u_0(t, x_1, \ldots, x_n)=\varphi_0(x_1, \ldots, x_n)+(t-t_0)\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$. С. Л. Соболев показал *), что для нелинейного гиперболического уравнения $L\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]+4$. При этом предполагается, что функция F, стоящая в правой части уравнения (4,16), имеет непрерывные производные по всем аргументам до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+3$.

6. Система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n\leqslant n_j} A_{ij}^{(k_0k_1\ldots k_n)}(t, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}=$$
$$=f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i=1, 2, \ldots, N)$$

называется *t-гиперболической* в точке $(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если при любых действительных α_i, сумма квадратов которых положительна, определитель

$$\left|\sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n=n_j} A_{ij}^{(k_0k_1\ldots k_n)}(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)\lambda^{k_0}\alpha_1^{k_1}\ldots\alpha_n^{k_n}\right|$$

имеет только действительные и различные корни λ. Аналогично определяется t-гиперболичность нелинейной системы вблизи какого-нибудь ее решения.

Для гиперболических систем доказана корректность постановки задачи Коши **).

Для уравнений с постоянными коэффициентами определение гиперболичности было обобщено Гордингом следующим

---

*) С. Л. Соболев, ДАН XX, № 2—3 (1938), 79—83; Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950.

**) И. Г. Петровский, Матем. сборник 2(44) (1937), 815—870. См. также Leray, Hyperbolic differential equations, Princeton, 1953; Л. Гординг, Математика (переводы), ИЛ 2:1 (1958), 81—95.

образом. Уравнение

$$\sum_{0\leqslant k_0+k_1+\ldots+k_n\leqslant m} a_{k_0k_1\ldots k_n}\frac{\partial^k u}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}=0$$

называется гиперболическим относительно направления $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, где ξ_i действительны и $\sum_{i=0}^{n}\xi_i^2>0$, если

$$\sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n=m} a_{k_0k_1\ldots k_n}\xi_0^{k_0}\xi_1^{k_1}\ldots\xi_n^{k_n}\neq 0$$

и существует такое действительное число λ^*, что

$$\sum_{0\leqslant k_0+k_1+\ldots+k_n\leqslant m} a_{k_0k_1\ldots k_n}(\lambda\xi_0+i\alpha_0)^{k_0}(\lambda\xi_1+i\alpha_1)^{k_1}\ldots$$
$$\ldots(\lambda\xi_n+i\alpha_n)^{k_n}\neq 0$$

при $\lambda>\lambda^*$ и любых действительных α_i. Доказано, что из всех линейных уравнений с постоянными коэффициентами только для уравнений, гиперболических в указанном выше смысле, задача Коши поставлена корректно при произвольных достаточно гладких начальных функциях, заданных на гиперплоскости

$$\xi_0x_0+\xi_1x_1+\ldots+\xi_nx_n=0^{*)}.$$

При исследовании уравнений с постоянными коэффициентами важную роль играет применение преобразований Фурье. С помощью преобразований Фурье изучен вопрос о корректности постановки задачи Коши для систем линейных уравнений с постоянными (или зависящими от t) коэффициентами, а также установлены качественные свойства решений таких систем **).

7. Для t-гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$\sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n=m} a_{k_0,k_1,\ldots,k_n}\frac{\partial^m u}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}=0 \qquad (6,16)$$

---

*) Gårding, Acta Mathematica, 85, № 1—2 (1951), 1—62. См. также И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, вып. 3, Физматгиз, 1958 (глава 3).

**) И. Г. Петровский, Бюллетень МГУ, секция А, 1, вып. 7 (1938); И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, вып. 3, Физматгиз, 1958 (глава 3).

получены формулы, дающие решение задачи Коши с начальными условиями на гиперплоскости $t=0$ *).

Для уравнений вида (6,16) изучен вопрос о диффузии волн, который был уже рассмотрен нами для волнового уравнения. Боковая поверхность характеристического конуса уравнения (6,16) с вершиной в точке $(t^*, \overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_n)$ разбивает основание его на гиперплоскости $t=0$, вообще говоря, на несколько областей. Одну из этих областей мы будем называть **лакуной**, если при любых изменениях начальных данных (лишь бы они оставались достаточно гладкими) только внутри этой области решение задачи Коши для уравнения (6,16) не изменяется в точке $(t^*, \overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_n)$. Если лакуна содержит проекцию вершины характеристического конуса на гиперплоскость $t=0$, то для уравнения (6,16) отсутствует диффузия волн. Наличие лакун у уравнения (6,16) определяется геометрическими (топологическими) свойствами поверхности

$$\sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n=m} a_{k_0, k_1, \ldots, k_n} \lambda^{k_0} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n} = 0$$

при $\lambda=1$ в комплексном пространстве $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$; найдены необходимые и достаточные условия существования лакун.

Вопрос о диффузии волн и лакунах изучался также и для общих t-гиперболических систем **).

8. Укажем следующий приближенный метод решения задачи Коши (метод конечных разностей) для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{7,16}$$

при начальных условиях

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y), \qquad u_t'(0, x, y) = \psi(x, y).$$

При этом предполагается, что начальные функции $\varphi(x, y)$ и

---

*) Herglotz, Berichte der Sächsischen Akademie **78** (1926), 93—126, 287—318; **80** (1928), 69—114. И. Г. Петровский, Матем. сборник **17**(59):3 (1945), 289—370. И. М. Гельфанд и З. Я. Шапиро, Успехи матем. наук **10**:3 (1955), 3—70.

) И. Г. Петровский, Изв. АН СССР, серия матем. **8 (1944), 101—106; Матем. сборник **17**(59):3 (1945), 289—370.

$\psi(x, y)$ имеют непрерывные производные до четвертого порядка включительно и определены в некотором квадрате G:

$$a < x < b; \quad c < y < d.$$

Проводятся три семейства параллельных плоскостей в пространстве (t, x, y):

$$t = k\Delta, \; k = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad x = m\delta, \; y = n\delta.$$

Здесь Δ и δ — некоторые положительные числа. Числа m и n пробегают такие последовательные целые значения, что всегда

$$a < m\delta < b \text{ и } c < n\delta < d.$$

Для упрощения изложения допустим, что

$$a = m_1\delta, \; b = m_2\delta, \; c = n_1\delta, \; d = n_2\delta.$$

Заменим в уравнении (7,16) $u''_{tt}(k\Delta, m\delta, n\delta)$ на

$$\frac{u[(k-1)\Delta, m\delta, n\delta] + u[(k+1)\Delta, m\delta, n\delta] - 2u(k\Delta, m\delta, n\delta)}{\Delta^2},$$

$u''_{xx}(k\Delta, m\delta, n\delta)$ заменим на

$$\frac{u[k\Delta, (m+1)\delta, n\delta] + u[k\Delta, (m-1)\delta, n\delta] - 2u(k\Delta, m\delta, n\delta)}{\delta^2},$$

$u''_{yy}(k\Delta, m\delta, n\delta)$ заменим на

$$\frac{u[k\Delta, m\delta, (n+1)\delta] + u[k\Delta, m\delta, (n-1)\delta] - 2u(k\Delta, m\delta, n\delta)}{\delta^2}.$$

Легко проверить, что если $u(t, x, y)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, то при достаточно малых Δ и δ проистекающие от такой замены ошибки малы. После этого дифференциальное уравнение (7,16) обращается в разностное уравнение, которое обозначим через (k, m, n). Придавая (k, m, n) различные допустимые значения, получим систему разностных уравнений. Решение этой системы будем обозначать $\bar{u}$.

В соответствии с начальными условиями положим

$$\bar{u}(0, m\delta, n\delta) = \varphi(m\delta, n\delta),$$

$$\frac{\bar{u}(\Delta, m\delta, n\delta) - \bar{u}(0, m\delta, n\delta)}{\Delta} = \psi(m\delta, n\delta).$$

Тогда начальные условия определят $\bar{u}(0, m\delta, n\delta)$ и $\bar{u}(\Delta, m\delta, n\delta)$ во всех узловых точках, для которых соответствующие точки $(0, m\delta, n\delta)$ лежат в области G.

После этого, выписывая разностные уравнения $(1, m, n)$, мы найдем значения $\bar{u}(2\Delta, m\delta, n\delta)$ во всех точках $(2\Delta, m\delta, n\delta)$, служащих вершинами A' пирамид указанного на рис. 5 вида.

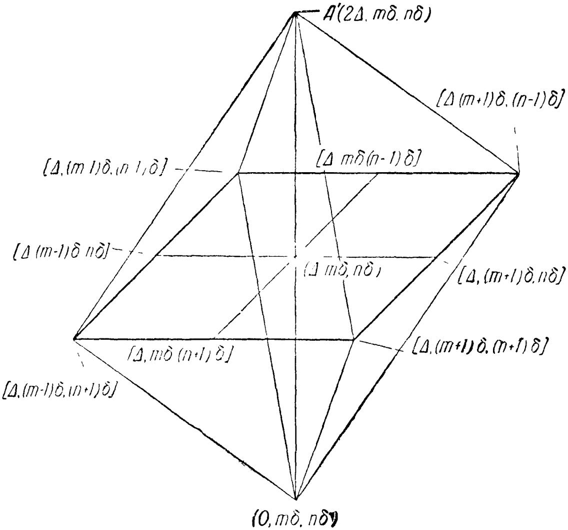

Рис. 5.

При этом предполагается, что все точки $[0, (m\pm 1)\delta, (n\pm 1)\delta]$ лежат внутри квадрата G, т. е. что

$$m_1+1<m<m_2-1, \quad n_1+1<n<n_2-1.$$

Выписывая потом уравнения $(2, m, n)$, мы найдем значения $\bar{u}$ в точках $(3\Delta, m\delta, n\delta)$, где

$$m_1+2<m<m_2-2, \quad n_1+2<n<n_2-2,$$

пользуясь ранее найденными значениями $\bar{u}$ на плоскостях

$$t=\Delta, \quad t=2\Delta.$$

Продолжая эти вычисления, мы найдем значения u во всех точках $(k\Delta, m\delta, n\delta)$, лежащих внутри пирамиды с основанием G

на плоскости $t=0$ и с боковыми гранями, наклоненными к этой плоскости под углом $\operatorname{arctg}\frac{\Delta}{\delta}$.

Если $\Delta<\delta$ и δ достаточно мало, то можно показать, что найденные значения $\bar{u}$ $(k\Delta, m\delta, n\delta)$ как угодно мало отличаются от значений в этих точках функции $u(t, x, y)$, которая служит точным решением поставленной задачи Коши.

Аналогично определяются приближенные значения $u(t, x, y)$ при $t<0$.

Такие же построения позволяют приближенно решить задачу Коши для более общих линейных гиперболических уравнений второго порядка с любым числом независимых переменных*).

Приближенному решению гиперболических уравнений и систем методом конечных разностей посвящено большое число работ.

9. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=k(y)\,h(x, y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x, y)\,\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\,\frac{\partial u}{\partial y}+$$

$$+c(x, y)\,u+f(x, y), \qquad (8,16)$$

где $k(0)=0$, $k(y)$ — монотонно возрастающая функция y и $h(x, y)>0$ при $y\geqslant 0$, является гиперболическим при $y>0$ и параболическим при $y=0$. Доказано, что задача Коши для уравнения (8,16) с начальными данными на параболической линии $y=0$

$$u(x, 0)=\varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)=\psi(x) \qquad (9,16)$$

поставлена корректно, если коэффициенты уравнения являются достаточно гладкими функциями и выполняется условие

$$\lim_{y\to 0}\frac{ya(x, y)}{\sqrt{k(y)}}=0.$$

Можно привести примеры, когда при нарушении этого условия задача Коши (8,16), (9,16) оказывается некорректной **). Аналогичные результаты получены также и для уравнения со многими независимыми переменными.

---

*) См., например, Курант, Фридрихс, Леви, Успехи матем. наук, вып. VIII (1941), 147—160.

**) И. С. Березин, Матем. сборник 24(66):2(1949), 301—320. Protter, Canadian Journal of Math. 6:4 (1954), 542—553.

10. Гиперболические системы нелинейных уравнений имеют широкое применение в механике, особенно при изучении движений газа. Многие задачи механики приводят к рассмотрению разрывных начальных условий и разрывных решений. Задача Коши для нелинейных гиперболических систем уравнений с разрывными начальными условиями обладает рядом особенностей, которых не имеют линейные системы уравнений. Рассмотрим примеры. В качестве начального условия для задачи Коши возьмем разрывные функции вида

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x\leqslant 0, \\ -1, & \text{если } x>0 \end{cases}$$

или

$$\psi(x)=\begin{cases} -1, & \text{если } x\leqslant 0, \\ 1, & \text{если } x>0. \end{cases}$$

Для линейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

решение задачи Коши с начальным условием

$$u(0,\,x)=\varphi(x) \tag{10,16}$$

и решение с начальным условием

$$u(0,\,x)=\psi(x) \tag{11,16}$$

определены однозначно во всех точках полуплоскости $t>0$. В точках прямой $x-t=0$ эти решения имеют разрыв *).

Для нелинейного уравнения

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{12,16}$$

решения задачи Коши с начальными условиями (10,16) и (11,16) не определены однозначно даже в сколь угодно малой окрестности прямой $t=0$, на которой заданы начальные условия.

Действительно, проведем в пространстве $(t,\,x,\,u)$ через точки $(0,\,x,\,u(0,\,x))$ характеристики уравнения (12,16). Эти

*) Разрывные решения линейных гиперболических систем исследованы в работе: Courant, Lax, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 42:11 (1956), 872—876.

характеристики являются прямыми, параллельными плоскости (t, x) *). Если $u(0, x) = \varphi(x)$, то проекции этих характеристик на плоскость (t, x) покрывают все точки полуплоскости $t > 0$. Точки области Q, лежащей между прямыми $x - t = 0$ и $x + t = 0$, покрываются проекциями этих характеристик дважды и притом с различными значениями u (рис. 6). Отсюда легко видеть, что решение $u(t, x)$ в точках, лежащих между прямыми $x - t = 0$ и $x + t = 0$, не может определяться однозначно по начальному условию.

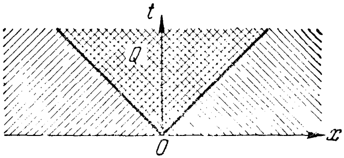

Рис. 6.

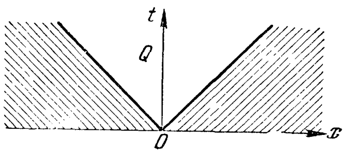

Рис. 7.

Если $u(0, x) = \psi(x)$, то проекции характеристик уравнения (12,16), проходящих через точки $(0, x, \psi(x))$ в пространстве (t, x, u), покрывают только точки, не принадлежащие области Q (рис. 7), т. е. решение не может быть определено по начальному условию в точках, расположенных между прямыми $x - t = 0$ и $x + t = 0$.

Таким образом, чтобы однозначно определить решение задачи Коши в полуплоскости $t > 0$ для нелинейного уравнения (12,16) с начальными условиями (10,16) или (11,16), необходимо по-новому поставить задачу Коши.

Так, для гиперболической системы уравнений, описывающей одномерное движение газа, вводятся дополнительные соотношения между искомыми функциями на линиях разрыва. Эта гиперболическая система была исследована Риманом **). Однако не все указанные Риманом дополнительные условия на линиях разрыва выполняются для реальных физических процессов. Соотношения на линиях разрыва для этой гипер-

*) Характеристика уравнения (12,16), проходящая через точку $(0, x_0, u(0, x_0))$, задается уравнениями $u = u(0, x_0)$, $x = u(0, x_0)\, t + x_0$. См. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1952, § 55.

**) Б. Риман, О распространении воздушных волн с конечной амплитудой. Сочинения, Гостехиздат, 1948.

болической системы были правильно указаны Гюгонио*). Эти соотношения можно получить, решая систему уравнений, описывающих движение газа с учетом вязкости и теплопроводности, и устремляя коэффициенты вязкости и теплопроводности к нулю. Учет вязкости и теплопроводности соответствует введению в систему уравнений первого порядка производных второго порядка, содержащих в качестве коэффициента малый параметр.

Можно определить решение задачи Коши для уравнения (12,16) с начальным условием при $t=0$ как предел при ε, стремящемся к нулю, решений уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (\varepsilon > 0)$$

с тем же начальным условием при $t=0$. При этом решение задачи Коши может быть разрывной функцией. На линии разрыва решения уравнения (12,16) будут выполняться условия

$$u(t, x+0) < u(t, x-0) \qquad (t > 0)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u(t, x+0) + u(t, x-0)}{2},$$

где $\frac{dx}{dt}$ — тангенс угла между касательной к линии разрыва и осью t; $u(x+0)$, $u(x-0)$ означают соответственно предел справа и предел слева в точке x функции $u(x)$.

Решением задачи Коши в новой постановке для уравнения (12,16) с начальным условием (10,16) является функция $u(t, x)$, равная 1, если $x < 0$, и равная -1, если $x > 0$.

Решением задачи Коши в новой постановке с начальным условием (11,16) является функция $u(t, x)$, равная 1, если $x - t > 0$, и равная -1, если $x + t < 0$. В каждой точке полуплоскости $t > 0$, расположенной в области Q, т. е. между прямыми $x - t = 0$ и $x + t = 0$, функция $u(t, x)$ равна тангенсу угла наклона к оси t прямой, соединяющей данную точку с началом координат. Расположение проекций характеристик, лежащих на этом решении, указано на рис. 8.

---

*) Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1954.

Построенная функция $u(t, x)$ непрерывна при $t>0$. Интересно отметить, что в указанной постановке задача Коши может иметь непрерывное решение при наличии разрыва в начальном условии.

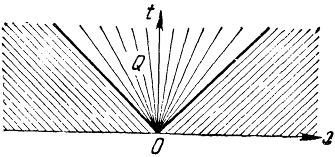

Рис. 8.

Если рассматривать гладкие начальные условия, то для линейных гиперболических уравнений гладкое решение будет определяться начальными условиями во всех точках полуплоскости $t>0$ для всех начальных условий, если коэффициенты подчинены определенным ограничениям. Для нелинейных гиперболических уравнений гладкое решение существует, как правило, только в малой окрестности линии, где заданы начальные условия. Это обстоятельство также приводит к необходимости рассматривать разрывные решения нелинейных гиперболических уравнений.

Основная задача при изучении разрывных решений нелинейных гиперболических систем состоит в том, чтобы определить класс функций, в котором существует единственное обобщенное решение задачи Коши, непрерывно зависящее в определенном смысле от начальных данных. Этот вопрос хорошо изучен для общего квазилинейного уравнения первого порядка *). Оказывается, что качественные свойства обобщенных решений такого уравнения напоминают свойства решений системы уравнений газовой динамики. Простейшее квазилинейное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}=0$$

часто называют поэтому *модельным уравнением* газовой динамики.

Вопрос о разрывных решениях нелинейных гиперболических систем пока еще мало изучен **). Этот вопрос представляет большой теоретический интерес и имеет важное прикладное значение.

---

*) О. А. Олейник, Успехи матем. наук **12**:3 (1957), 3—73; см. также Успехи матем. наук **14**:2 (1959), 159—170.

) Обзор некоторых относящихся сюда результатов и развернутая постановка ряда задач имеются в статье И. М. Гельфанда в «Успехах математических наук», **14:2 (1959), 87—158.