РАЗДЕЛ II

КОЛЕБАНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛ

§ 17. Введение

1. Предыдущий раздел главы 2 был посвящен задаче Коши. Наше главное внимание было уделено волновому уравнению (1,13), которому подчинены колебания однородных изотропных упругих тел. К задаче Коши сводится изучение функции $u(t, x_1, \ldots, x_n)$, характеризующей эти колебания в точках $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при t, достаточно близком к начальному моменту. Так как значение решения $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (1,13) в вершине $P(t, x_1, \ldots, x_n)$ характеристического конуса вполне определяется значениями начальных функций φ_0 и φ_1 на основании C_p этого конуса, то при изучении $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ можно не принимать в расчет влияния границы до тех пор, пока C_p не выходит из той области, где заданы функции φ_0 и φ_1, т. е. пока C_p не пересекает границы тела. В этом смысле можно сказать, что в предыдущем разделе мы изучали колебания бесконечных или безграничных тел.

В настоящем разделе мы будем изучать колебания тел, учитывая влияние их границ. Ограничиваясь опять изучением колебаний однородных изотропных тел, мы придем к задаче нахождения решений уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \tag{1,17}$$

удовлетворяющих при $t = 0$ *начальным условиям*

$$\left.\begin{aligned} u(0, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_0(x_1, \ldots, x_n), \\ u_t'(0, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{2,17}$$

когда точка $(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит заданной области G, и заданным при всех t на границе G *граничным условиям*. Мы будем рассматривать только однородные граничные условия вида

$$u = 0, \tag{3,17$_1$}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \tag{3,17$_2$}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0, \tag{3,17$_3$}$$

где σ есть некоторая не зависящая от t неотрицательная непрерывная функция, заданная на границе G, и $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по направлению внешней нормали к границе G (ср. § 1).

Некоторые физические задачи, например задачи о колебаниях неоднородных упругих тел, приводятся к нахождению при тех же граничных условиях (3,17) и начальных условиях (2,17) решений уравнений вида

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - qu + f. \tag{4,17}$$

Здесь ρ, p_i, q и f — некоторые достаточно гладкие функции от x_k, причем обычно

$$\rho > \rho_0 > 0; \quad p_i > p_{i0} > 0; \quad q \geqslant 0.$$

Так как волновое уравнение (1,17) и уравнение (4,17) не изменяются, если t заменить на $-t$, то рассуждения, которые мы будем приводить для решений этих уравнений при $t > 0$, будут также справедливы и для $t < 0$.

Задача нахождения решения уравнения (4,17) при начальных условиях (2,17) и одном из граничных условий (3,17) называется *смешанной задачей*. Весь настоящий раздел главы 2 будет посвящен этой задаче.

2. Смешанная задача не является единственной возможной задачей для уравнения (1,17) или (4,17) в ограниченной области. Практические вопросы часто приводят к другим задачам для этих уравнений. Укажем ряд таких задач для простейшего уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{5,17}$$

1) Задача Гурса. *Найти решение уравнения* (5,17) *по его значениям на двух кусках характеристик.*

На отрезке OA (рис. 9) характеристики $t + x = 0$

$$u(t, x) = \varphi(x).$$

На отрезке OB характеристики $t - x = 0$

$$u(t, x) = \psi(x).$$

Для непрерывности решения при этом требуется, чтобы выполнялось условие

$$\varphi(0)=\psi(0)$$

(см. С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1954, стр. 63—67).

2) *Найти решение уравнения* (5,17), *если заданы его значения на отрезке OB характеристики* $t=x$ *и на выходящей из точки O линии L, лежащей внутри угла, обра-*

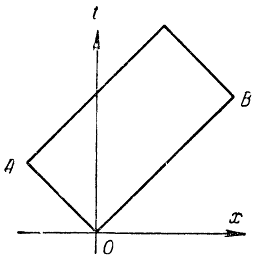

Рис. 9

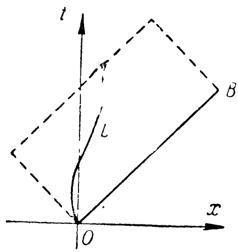

Рис. 10.

зованного характеристиками $t=\pm x$, *и обладающей тем свойством, что каждая характеристика* $t=x+C$ *пересекает L в одной точке* (рис. 10).

Читатель может решить самостоятельно эти задачи, пользуясь представлением решения (5,17) в виде

$$u(t, x)=f_1(t+x)+f_2(t-x)$$

(см. пример 1 § 6).

Решение в обоих случаях определится в прямоугольнике, образованном характеристиками, проходящими через концы линий, на которых заданы значения функции u.

3) Если задавать значения функции $u(t, x)$ на двух (для простоты положим прямых) линиях L и L_1, выходящих из начала координат, то существенно различными будут два случая: а) когда L и L_1 лежат внутри одного угла, образованного характеристиками, выходящими из точки O, и б) когда L и L_1 разделены характеристикой.

В первом случае для определения единственного решения уравнения (5,17) достаточно задать только значения самой функции $u(t, x)$ на линиях L и L_1, а во втором случае на одной из этих линий надо задать «данные Коши» — значения самого решения и его первой производной по нормали к этой линии (ср. Гурса, Курс математического анализа, т. 3, часть I, ГТТИ, 1933, стр. 100—112).

3. Наши последующие рассмотрения будут в большинстве случаев одинаково применимы для любого n. Для большего удобства в выкладках и чертежах мы будем многие рассуждения проводить только для $n=2$ или $n=1$, особо указывая формулировки для других n только в тех случаях, когда они будут существенно отличаться от этих.

Считая, как мы только что сказали, $n=2$, мы будем рассматривать решения $u(t, x_1, x_2)$ уравнений вида (1,17) или (4,17) при $0 \leqslant t \leqslant T$, когда точка (x_1, x_2) находится внутри области G, ограниченной линией l, состоящей из конечного числа дуг l_i с непрерывно меняющейся касательной.

Иначе можно то же самое сказать так: считая $n=2$, мы будем рассматривать решения $u(t, x_1, x_2)$ уравнений (1,17) или (4,17), определенные внутри цилиндра $Ц_T$, у которого образующие боковой поверхности параллельны оси Ot и проходят через границу области G, находящейся в плоскости $t=0$, а основания находятся в плоскостях $t=0$ и $t=T$. Мы будем всюду в этом разделе предполагать, не оговаривая это каждый раз особо, что рассматриваемые решения $u(t, x_1, x_2)$ удовлетворяют уравнению (1,17) или (4,17) внутри $Ц_T$ и непрерывны вместе со своими первыми и вторыми производными в $\overline{Ц}_T$, т. е. в цилиндре $Ц_T$ вместе с его границей.

§ 18. Единственность решения смешанной задачи

Пусть $u_1(t, x_1, x_2)$ и $u_2(t, x_1, x_2)$ — два решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \tag{1,18}$$

определенные в цилиндре $Ц_T$, обладающие всеми перечисленными в предыдущем параграфе свойствами и являющиеся решениями одной и той же смешанной задачи, т. е. мы будем предполагать, что при $t=0$ они удовлетворяют одним и тем же начальным условиям (2,17), а на боковой поверхности цилиндра $Ц_T$ одним и тем же граничным условиям какого-нибудь из видов (3,17). Нашей целью является доказать,