одной из этих линий надо задать «данные Коши» — значения самого решения и его первой производной по нормали к этой линии (ср. Гурса, Курс математического анализа, т. 3, часть I, ГТТИ, 1933, стр. 100—112).

3. Наши последующие рассмотрения будут в большинстве случаев одинаково применимы для любого n. Для большего удобства в выкладках и чертежах мы будем многие рассуждения проводить только для $n=2$ или $n=1$, особо указывая формулировки для других n только в тех случаях, когда они будут существенно отличаться от этих.

Считая, как мы только что сказали, $n=2$, мы будем рассматривать решения $u(t, x_1, x_2)$ уравнений вида (1,17) или (4,17) при $0 \leqslant t \leqslant T$, когда точка (x_1, x_2) находится внутри области G, ограниченной линией l, состоящей из конечного числа дуг l_i с непрерывно меняющейся касательной.

Иначе можно то же самое сказать так: считая $n=2$, мы будем рассматривать решения $u(t, x_1, x_2)$ уравнений (1,17) или (4,17), определенные внутри цилиндра $Ц_T$, у которого образующие боковой поверхности параллельны оси Ot и проходят через границу области G, находящейся в плоскости $t=0$, а основания находятся в плоскостях $t=0$ и $t=T$. Мы будем всюду в этом разделе предполагать, не оговаривая это каждый раз особо, что рассматриваемые решения $u(t, x_1, x_2)$ удовлетворяют уравнению (1,17) или (4,17) внутри $Ц_T$ и непрерывны вместе со своими первыми и вторыми производными в $\overline{Ц}_T$, т. е. в цилиндре $Ц_T$ вместе с его границей.

§ 18. Единственность решения смешанной задачи

Пусть $u_1(t, x_1, x_2)$ и $u_2(t, x_1, x_2)$ — два решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \tag{1,18}$$

определенные в цилиндре $Ц_T$, обладающие всеми перечисленными в предыдущем параграфе свойствами и являющиеся решениями одной и той же смешанной задачи, т. е. мы будем предполагать, что при $t=0$ они удовлетворяют одним и тем же начальным условиям (2,17), а на боковой поверхности цилиндра $Ц_T$ одним и тем же граничным условиям какого-нибудь из видов (3,17). Нашей целью является доказать, что функции $u_1(t, x_1, x_2)$ и $u_2(t, x_1, x_2)$ совпадают между собой всюду в цилиндре $Ц_T$. Доказательство этого утверждения эквивалентно доказательству следующей теоремы.

Теорема. *Функция*

$$u(t, x_1, x_2) = u_2(t, x_1, x_2) - u_1(t, x_1, x_2),$$

удовлетворяющая уравнению (1,18) *внутри* $Ц_T$, *непрерывная вместе со своими первыми и вторыми производными в* $\overline{Ц}_T$, *удовлетворяющая на боковой поверхности* $Ц_T$ *одному из условий* (3,17), *а при* $t=0$ *обращающаяся в нуль вместе с* u'_t, *тождественно равна нулю в* $Ц_T$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\iiint \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) dt\, dx_1\, dx_2, \tag{2,18}$$

распространенный по цилиндру $Ц_{t^*}$, где $0 < t^* \leqslant T$. Так как функция u удовлетворяет уравнению (1,18), то интеграл равен нулю. Преобразуем его в интеграл по поверхности цилиндра $Ц_{t^*}$ аналогично тому, как было сделано в § 11 при доказательстве единственности решения задачи Коши. Получим

$$\frac{1}{2}\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]_{t=t^*} dx_1\, dx_2 -$$
$$- \frac{1}{2}\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]_{t=0} dx_1\, dx_2 -$$
$$- \int_0^{t^*} dt \int_l \left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(n, x_1) + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(n, x_2)\right] ds = 0.$$

Здесь l, как обычно, означает границу области G, ds — элемент дуги границы. Первый интеграл берется по верхнему основанию цилиндра $Ц_{t^*}$, второй — по нижнему, а третий — по его боковой поверхности. Последний интеграл можно переписать в виде

$$\int_0^{t^*} dt \int_l \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Итак, окончательно получаем

$$\frac{1}{2}\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]_{t=t^*} dx_1\,dx_2 - \\ -\frac{1}{2}\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]_{t=0} dx_1\,dx_2 - \\ -\int_0^{t^*} dt\int_l \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds=0. \qquad (3{,}18)$$

Второй из этих интегралов равен нулю в силу начальных условий. Если на границе G всегда $u=0$, то там и $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, поэтому тогда третий интеграл также равен нулю. Он равен нулю и в том случае, если на границе $\frac{\partial u}{\partial n}=0$. Если же на границе $\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=0$, то этот интеграл обращается в интеграл

$$-\int_0^{t^*} dt\int_l \sigma u\,\frac{\partial u}{\partial t}\,ds=-\frac{1}{2}\int_l \sigma\,ds\int_0^{t^*}\frac{\partial (u^2)}{\partial t}\,dt= \\ =-\frac{1}{2}\int_l \sigma u^2(t^*)\,ds+\frac{1}{2}\int_l \sigma u^2(0)\,ds. \qquad (4{,}18)$$

Последний интеграл равен нулю в силу начальных условий. Итак, при всяком t^* между 0 и t, если на границе G всюду $u=0$ или $\frac{\partial u}{\partial n}=0$, то

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]_{t=t^*} dx_1\,dx_2=0, \qquad (5{,}18)$$

если же на границе G всюду $\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=0$, то

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]_{t=t^*} dx_1\,dx_2+ \\ +\frac{1}{2}\int_l \sigma u^2(t^*)\,ds=0. \qquad (6{,}18)$$

Так как $\sigma\geqslant 0$, то из соотношений (5,18) и (6,18) следует, что при каждом из граничных условий (3,17)

$$\iint\limits_{G} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]_{t=t^*} dx_1\, dx_2 = 0. \quad (7,18)$$

Так как мы предполагаем, что у функции u все первые производные непрерывны в $\overline{Ц}_T$ и t^* есть произвольное число между 0 и T, то из соотношения (7,18) следует, что всюду в $\overline{Ц}_T$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$$

Значит, u постоянна во всем $Ц_T$. А так как $u(0, x_1, x_2) \equiv 0$, то во всем цилиндре $Ц_T$

$$u(t, x_1, x_2) \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что интеграл в левой части (7,18) равен, с точностью до постоянного множителя, сумме кинетической и потенциальной энергии колеблющейся мембраны в момент $t = t^*$, а равенство (3,18) при граничных условиях $(3,17)_1$ и $(3,17)_2$ выражает закон сохранения энергии (ср. § 1, п. 3).

Задача. Докажите единственность в $Ц_T$ решения задачи с начальными условиями (2,17) и граничными условиями $(3,17)_1$ для уравнения (4,17).

§ 19. Непрерывная зависимость решения от начальных условий

Теорема. *Пусть мы имеем два решения $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$ уравнения* (1,17) *при $n = 1$ в цилиндре $Ц_T$* *).

Пусть оба эти решения на боковой поверхности удовлетворяют одним и тем же граничным условиям какого-нибудь из типов (3,17), *а при $t = 0$*

$$u_1(0, x) = \varphi_0^{(1)}(x); \qquad u'_{1t}(0, x) = \varphi_1^{(1)}(x);$$

$$u_2(0, x) = \varphi_0^{(2)}(x); \qquad u'_{2t}(0, x) = \varphi_1^{(2)}(x).$$

---

*) Очевидно, что при $n = 1$ цилиндр $Ц_T$ представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными осям Ot и Ox.