что при каждом из граничных условий (3,17)

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]_{t=t^*} dx_1\, dx_2=0. \quad (7,18)$$

Так как мы предполагаем, что у функции u все первые производные непрерывны в $\overline{Ц}_T$ и t^* есть произвольное число между 0 и T, то из соотношения (7,18) следует, что всюду в $\overline{Ц}_T$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{\partial u}{\partial x_2}=0.$$

Значит, u постоянна во всем $Ц_T$. А так как $u(0, x_1, x_2)\equiv 0$, то во всем цилиндре $Ц_T$

$$u(t, x_1, x_2)\equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что интеграл в левой части (7,18) равен, с точностью до постоянного множителя, сумме кинетической и потенциальной энергии колеблющейся мембраны в момент $t=t^*$, а равенство (3,18) при граничных условиях $(3,17)_1$ и $(3,17)_2$ выражает закон сохранения энергии (ср. § 1, п. 3).

Задача. Докажите единственность в $Ц_T$ решения задачи с начальными условиями (2,17) и граничными условиями $(3,17)_1$ для уравнения (4,17).

§ 19. Непрерывная зависимость решения от начальных условий

Теорема. *Пусть мы имеем два решения* $u_1(t, x)$ *и* $u_2(t, x)$ *уравнения* (1,17) *при* $n=1$ *в цилиндре* $Ц_T$ *).

Пусть оба эти решения на боковой поверхности удовлетворяют одним и тем же граничным условиям какого-нибудь из типов (3,17), *а при* $t=0$

$$u_1(0, x)=\varphi_0^{(1)}(x); \qquad u'_{1t}(0, x)=\varphi_1^{(1)}(x);$$
$$u_2(0, x)=\varphi_0^{(2)}(x); \qquad u'_{2t}(0, x)=\varphi_1^{(2)}(x).$$

---

*) Очевидно, что при $n=1$ цилиндр $Ц_T$ представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными осям Ot и Ox.

Если разности

$$\varphi_i^{(2)}(x) - \varphi_i^{(1)}(x) = \varphi_i(x) \qquad (i = 0,1)$$

и первая производная функции $\varphi_0(x)$ *всюду в* G *достаточно малы по абсолютной величине, то разность*

$$u_2(t, x) - u_1(t, x) = u(t, x)$$

сколь угодно мала по абсолютной величине во всем $Ц_T$.

Аналогичная теорема верна для решений уравнения (1,17) в $Ц_T$ при любом n. Но тогда для обеспечения малости $u_2(t, x_1, \ldots, x_n) - u_1(t, x_1, \ldots, x_n) = u(t, x_1, \ldots, x_n)$ во всем цилиндре $Ц_T$ надо требовать, чтобы мало отличались от нуля в G не только функции

$$u(0, x_1, \ldots, x_n) \text{ и } u_t'(0, x_1, \ldots, x_n),$$

но и все их производные по $x_1, \ldots, x_n$ до порядка $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ включительно; кроме того, надо, чтобы на границе области G, лежащей в основании цилиндра $Ц_T$, производные от этих разностей до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]$ удовлетворяли некоторым дополнительным соотношениям, которые при $n = 1$ удовлетворяются автоматически. Доказательство этой теоремы для $n > 1$ становится много сложнее, чем для $n = 1$, и мы его не приводим.

Доказательство теоремы для $n = 1$. Рассмотрим опять интеграл типа (2,18) по цилиндру $Ц_T$, который теперь вырождается в прямоугольник $\{0 \leqslant t \leqslant T,\quad a \leqslant x \leqslant b\}$. Этот интеграл по-прежнему равен нулю при всяком t^* между 0 и T. Преобразуя его аналогично предыдущему, получим

$$\iint\limits_{Ц_{t^*}} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dt\, dx = \frac{1}{2}\int_a^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]_{t=t^*} dx -$$

$$- \frac{1}{2}\int_a^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]_{t=0} dx -$$

$$- \int_0^{t^*} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=b} dt + \int_0^{t^*} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a} dt = 0.$$

Отсюда, так как $a<b$ и

$$u(0,\ x)=\varphi_0;\quad u'_t(0,\ x)=\varphi_1;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=b}=\frac{\partial u}{\partial n};\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a}=-\frac{\partial u}{\partial n}\ ^{*)},$$

имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^b\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]_{t=t^*}dx=\frac{1}{2}\int\limits_a^b[\varphi_1^2(x)+\varphi_0'^2(x)]\,dx+$$
$$+\int\limits_0^{t^*}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=a}dt+\int\limits_0^{t^*}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=b}dt. \quad (1,19)$$

Если $u(t,\ a)=0$ или $\frac{\partial u(t,\ a)}{\partial n}=0$, то

$$\int\limits_0^{t^*}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=a}dt=0.$$

Если же при $x=a$ имеет место граничное условие $\frac{\partial u}{\partial n}+$ $+\sigma_a n=0$, то

$$\int\limits_0^{t^*}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=a}dt=-\sigma_a\int\limits_0^{t^*}u\frac{\partial u}{\partial t}\,dt=-\frac{\sigma_a u^2(t^*,\ a)}{2}+\frac{\sigma_a u^2(0,\ a)}{2}.$$

Аналогичные равенства можно написать при $x=b$, если при $x=b$ налагается одно из условий: $u(t,\ b)=0$, $\frac{\partial u(t,\ b)}{\partial n}=0$, $\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma_b u=0$.

Таким образом, отбрасывая, если нужно, отрицательные слагаемые в правой части формулы (1,19), мы при каждом из граничных условий (3,17) имеем

$$\int\limits_a^b\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]_{t=t^*}dx\leqslant\int\limits_a^b[\varphi_1^2(x)+\varphi_0'^2(x)]\,dx+$$
$$+\sigma_a\varphi_0^2(a)+\sigma_b\varphi_0^2(b)\ ^{**)}. \quad (2,19)$$

---

*) Напомним, что $\frac{\partial}{\partial n}$ всегда означает дифференцирование по направлению внешней нормали.

**) При граничных условиях $u=0$ или $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ это неравенство обращается в равенство, которое выражает закон сохранения энергии.

Так как правая часть по предположению мала, то, следовательно, мала и левая часть. Обозначая через ε^2 величину правой части неравенства (2,19), мы найдем, что при всяком t^* между 0 и T и при всяком x, если $a \leqslant x \leqslant b$,

$$\int_a^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2_{t=t^*} dx \leqslant \varepsilon^2, \qquad (3,19)_1$$

$$\int_a^x \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2_{t=t^*} dx \leqslant \varepsilon^2. \qquad (3,19)_2$$

Из неравенства $(3,19)_1$ получим, применяя неравенство Буняковского,

$$|u(t^*, x) - u(t^*, a)| \leqslant \int_a^x \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| dx =$$

$$= \int_a^x 1 \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| dx \leqslant \left[\int_a^x dx \int_a^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{b-a}\, \varepsilon. \qquad (4,19)$$

Таким же образом из неравенства $(3,19)_2$ получаем

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b u\, dx\right| = \left|\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\right| \leqslant \int_a^b \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| dx \leqslant \sqrt{b-a}\, \varepsilon. \qquad (5,19)$$

Далее,

$$\left|\int_a^b u(t^*, x)\, dx - \int_a^b u(0, x)\, dx\right| =$$

$$= \left|\int_0^{t^*} \left[\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b u(t, x)\, dx\right] dt\right| \leqslant t^* \varepsilon \sqrt{b-a}.$$

Отсюда

$$\left|\int_a^b u(t^*, x)\, dx\right| \leqslant t^* \varepsilon \sqrt{b-a} + \left|\int_a^b \varphi_0(x)\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant t^* \varepsilon \sqrt{b-a} + \max|\varphi_0|\,(b-a). \qquad (6,19)$$

Интегрируя неравенство (4,19) по x между $x=a$ и $x=b$, найдем

$$\left| \int_a^b u(t^*, x)\,dx - (b-a)\,u(t^*, a) \right| \leqslant \varepsilon (b-a)^{\frac{3}{2}} \tag{7,19}$$

и, оценивая интеграл в левой части формулы (7,19) с помощью (6,19), убеждаемся, что значения $|u(t^*, a)|$ как угодно малы при всяком t^* из интервала $(0, T)$ и достаточно малых ε и $\max|\varphi_0|$. А отсюда, снова пользуясь неравенством (4,19), мы получим, что $|u(t^*, x)|$ мал во всем прямоугольнике $Ц_T$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Если на одном из концов отрезка $[a, b]$, например при $x=a$, задано условие $u=0$ при всех $t \geqslant 0$, то малость $|u(t, x)|$ в $Ц_T$ непосредственно следует из соотношения (4,19).

Если бы на одном из концов отрезка $[a, b]$, например при $x=a$, было задано условие $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_a u = 0$ при $\sigma_a > 0$, то из соотношения (1,19) следовало бы, что

$$\int_a^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right]_{t=t^*} dx + \sigma_a u^2(t^*, a) \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b [\varphi_1^2(x) + \varphi_0'^2(x)]\,dx + \sigma_a \varphi_0^2(a) + \sigma_b \varphi_0^2(b) \leqslant \varepsilon^2.$$

Отсюда

$$\sigma_a u^2(t^*, a) \leqslant \varepsilon^2,$$

и малость $|u(t^*, x)|$ в $Ц_T$ следовала бы опять непосредственно из (4,19) в силу малости $|u(t^*, a)|$.

Замечание 2. Если бы n было больше 1, то совершенно так же, как и в случае $n=1$, мы нашли бы, что из равномерной малости $|u_t'(0, x_1, \ldots, x_n)|$, $|u(0, x_1, \ldots, x_n)|$ и производных $\left|\frac{\partial u(0, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}\right|$ следует малость

$$\int_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 \right]_{t=t^*} dx_1 \ldots dx_n. \tag{8,19}$$

Но из малости этого интеграла при всех t^* между 0 и T и малости $|u(0, x_1, \ldots, x_n)|$ было бы невозможно вывести малость $|u|$ в $Ц_T$. Можно привести пример функции u, для которой этот интеграл мал при всех рассматриваемых t^* и которая тем не менее в некоторых точках $Ц_T$ принимает очень большие значения, несмотря на малость $|u(0, x_1, \ldots, x_n)|$. Чтобы гарантировать малость $|u|$ в $Ц_T$, достаточно, чтобы кроме интеграла (8,19), при $t = t^*$ были малы интегралы вида (8,19), где вместо u входят всевозможные производные вида

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \quad \text{при } k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right],$$

и чтобы были равномерно малы значения $|u(0, x_1, \ldots, x_n)|$ *). Именно таким путем доказывается малость $|u|$ в $Ц_T$ при достаточно малых по абсолютной величине φ_0, φ_1 и их производных по $x_1, \ldots, x_n$ до порядка $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$, если выполнены некоторые дополнительные условия для значений φ_0 и φ_1 на границе G **).

Замечание 3. Из доказательства теоремы видно, что утверждение теоремы остается справедливым, если требование равномерной малости $|u(0, x)|$, $|u'_x(0, x)|$ и $|u'_t(0, x)|$ заменить требованием малости интегралов

$$\int_a^b u_x'^2 (0, x)\, dx \quad \text{и} \quad \int_a^b u_t'^2 (0, x)\, dx$$

и одной из величин $|u(0, a)|$ или $|u(0, b)|$. Действительно, в неравенствах (2,19) и (6,19) мы использовали только малость этих интегралов и малость $|u(0, x)|$. Но если, например, $|u(0, a)|$ мало, то

$$|u(0, x)| = \left| u(0, a) + \int_a^x u'_x (0, x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant |u(0, a)| + \sqrt{b-a} \left(\int_a^b u_x'^2 (0, x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

откуда следует равномерная малость $|u(0, x)|$.

---

*) Это следует из так называемых теорем вложения С. Л. Соболева (см. С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950).

**) См. M. Krzyżański, J. Schauder, Studia Mathematica, т. VI, 1936, 162—189.

Задача 1. Докажите теорему о непрерывной зависимости решения от начальных условий для уравнения (4,17) при $n=1$ и граничном условии $(3,17)_1$.

Задача 2. Докажите, что решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - qu + f(t, x)$$

($p(x) > 0$, $q > 0$ и $f(t, x)$ — достаточно гладкие функции), удовлетворяющее начальным условиям (2,17) и граничному условию $(3,17)_1$, изменится в $Ц_T$ сколь угодно мало по абсолютной величине, если достаточно мало изменить функцию $f(t, x)$ в $Ц_T$.

§ 20. Метод Фурье для уравнения струны

1. Для решения смешанной задачи во многих случаях применим так называемый метод Фурье. В настоящем параграфе мы рассмотрим применение этого метода на одном частном примере. В следующем параграфе будет изложена общая схема применения этого метода к решению смешанной задачи для линейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1,20}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(0, x) &= \varphi_0(x), \\ u'_t(0, x) &= \varphi_1(x), \\ 0 \leqslant x &\leqslant l, \end{aligned}\right\} \tag{2,20}$$

и граничным условиям при $t > 0$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0. \tag{3,20}$$

Сначала мы попытаемся найти нетривиальные, т. е. не равные нулю тождественно, решения уравнения (1,20) вида

$$u(t, x) = T(t)X(x), \tag{4,20}$$

удовлетворяющие граничным условиям (3,20). Мы здесь считаем, что $T(t)$ зависит только от t, а $X(x)$ — только