Задача 1. Докажите теорему о непрерывной зависимости решения от начальных условий для уравнения (4,17) при $n=1$ и граничном условии $(3,17)_1$.

Задача 2. Докажите, что решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-qu+f(t,\ x)$$

($p(x)>0$, $q>0$ и $f(t,\ x)$ — достаточно гладкие функции), удовлетворяющее начальным условиям (2,17) и граничному условию $(3,17)_1$, изменится в $Ц_T$ сколь угодно мало по абсолютной величине, если достаточно мало изменить функцию $f(t,\ x)$ в $Ц_T$.

§ 20. Метод Фурье для уравнения струны

1. Для решения смешанной задачи во многих случаях применим так называемый метод Фурье. В настоящем параграфе мы рассмотрим применение этого метода на одном частном примере. В следующем параграфе будет изложена общая схема применения этого метода к решению смешанной задачи для линейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1,20}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(0,\ x)&=\varphi_0(x),\\ u'_t(0,\ x)&=\varphi_1(x),\\ 0\leqslant x&\leqslant l,\end{aligned}\right\} \tag{2,20}$$

и граничным условиям при $t>0$

$$u(t,\ 0)=u(t,\ l)=0. \tag{3,20}$$

Сначала мы попытаемся найти нетривиальные, т. е. не равные нулю тождественно, решения уравнения (1,20) вида

$$u(t,\ x)=T(t)\,X(x), \tag{4,20}$$

удовлетворяющие граничным условиям (3,20). Мы здесь считаем, что $T(t)$ зависит только от t, а $X(x)$ — только от x. Подставив правую часть (4,20) вместо u в уравнение (1,20), получим

$$XT'' = X''T \text{ или } \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}. \tag{5,20}$$

Левая часть последнего равенства не зависит от x, а правая не зависит от t. Следовательно, каждая из величин $\frac{T''}{T}$ и $\frac{X''}{X}$ не зависит ни от x, ни от t, т. е. она постоянна. Обозначим эту постоянную через $-\lambda$. Тогда из равенства (5,20) следует, что

$$T'' + \lambda T = 0, \tag{6,20}$$

$$X'' + \lambda X = 0. \tag{7,20}$$

Таким образом, уравнение (5,20) распалось на два уравнения, из которых одно содержит только функции от t, а другое — только функции от x. В таких случаях говорят, что *переменные разделились.*

Чтобы получить нетривиальное решение $u(t, x)$ вида (4,20), удовлетворяющее граничным условиям (3,20), необходимо найти нетривиальное, т. е. не равное тождественно нулю решение уравнения (7,20), удовлетворяющее краевым условиям

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{8,20}$$

Формулы, дающие общее решение уравнения (7,20), имеют существенно различный вид в зависимости от того, что

$$\lambda < 0, \ \lambda = 0 \text{ или } \lambda > 0.$$

Рассмотрим в отдельности каждый из этих трех случаев.

I случай ($\lambda < 0$). Тогда общее решение уравнения (7,20) напишется в виде

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Чтобы удовлетворились краевые условия (8,20), должно быть

$$C_1 + C_2 = 0 \text{ и } C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0.$$

Следовательно, должно быть

$$C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}l}.$$

А это последнее равенство может выполняться только если

$C_1=0$, значит, и $C_2=0$. Тогда мы получаем только тривиальное решение уравнения (7,20).

II случай ($\lambda=0$). Тогда общее решение уравнения (7,20) имеет вид

$$X(x)=C_1+C_2x.$$

Чтобы $X(0)=0$, должно быть $C_1=0$. А тогда условие $X(l)=0$ принимает вид $C_2l=0$; значит, должно быть $C_2=0$. Таким образом, мы так же, как и в предыдущем случае, приходим к выводу, что только тривиальное решение уравнения (7,20) может удовлетворить обоим краевым условиям (8,20).

III случай ($\lambda>0$). Тогда общее решение уравнения (7,20) имеет вид

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Чтобы удовлетворить краевому условию $X(0)=0$, должно быть

$$C_1=0.$$

А тогда условие $X(l)=0$ примет вид

$$C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0 \text{ или } \sin\sqrt{\lambda}l=0,$$

так как, если бы $C_2=0$, мы опять пришли бы к тривиальному решению. Уравнение

$$\sin\sqrt{\lambda}l=0$$

удовлетворяется тогда и только тогда, если

$$\sqrt{\lambda}l=k\pi, \text{ т. е. } \lambda=\frac{k^2\pi^2}{l^2},$$

где k — какое-нибудь целое число или 0. Так как мы предполагаем, что $\lambda>0$, то k не может быть равным нулю. При отрицательных значениях k величина λ принимает такие же значения, как и при положительных k, имеющих ту же абсолютную величину. Поэтому все значения λ, при которых уравнение (7,20) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие краевым условиям (8,20), даются формулой

$$\lambda_k=\frac{k^2\pi^2}{l^2}, \text{ где } k=1, 2, \ldots \tag{9,20}$$

Задача нахождения нетривиальных решений уравнения (7,20), удовлетворяющих краевым условиям (8,20), есть частный случай задачи, называемой «задачей о собственных значениях» или иногда «задачей Штурма—Лиувилля» по имени двух математиков, которые ее исследовали. Те значения λ, при которых наша задача имеет нетривиальные решения, называются *собственными значениями*, а нетривиальные решения этой задачи называются *собственными функциями*, соответствующими данному собственному значению. У нас собственному значению $\frac{k^2\pi^2}{l^2}$ соответствует собственная функция

$$X_k(x) = C_k \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Ввиду однородности уравнения (7,20) собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя C_k. Выбирая соответствующим образом этот множитель, можно подчинить собственную функцию $X_k(x)$ некоторому дополнительному условию, как говорят, можно «*нормировать*» собственную функцию.

Нам будет удобно произвести эту нормировку так, чтобы

$$\int_0^l X_k^2(x)\,dx = 1.$$

Для этого должно быть

$$C_k = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Дальше всюду в этом параграфе мы будем предполагать, что

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Вернемся теперь к решению поставленной в начале параграфа смешанной задачи. Подставив в уравнение (6,20) вместо λ его значение λ_k, даваемое формулой (9,20), мы получим

$$T'' + \frac{k^2\pi^2}{l^2} T = 0.$$

Отсюда

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{k\pi}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi}{l}t,$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные.

Все функции

$$u_k(t, x) = X_k(x)\,T_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x\left(A_k\cos\frac{k\pi}{l}t + B_k\sin\frac{k\pi}{l}t\right)$$

удовлетворяют уравнению (1,20) и граничным условиям (3,20) при любых A_k и B_k. Попытаемся определить эти постоянные таким образом, чтобы бесконечный ряд

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\left[A_k\cos\frac{k\pi}{l}t + B_k\sin\frac{k\pi}{l}t\right] \tag{10,20}$$

удовлетворял и уравнению (1,20), и граничным условиям (3,20), и начальным условиям (2,20). Начнем с начальных условий. Должно быть, во-первых,

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) = \varphi_0(x). \tag{11,20}$$

Кроме того, если ряд можно дифференцировать почленно должно быть

$$u_t'(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} B_k X_k(x) = \varphi_1(x). \tag{12,20}$$

Допустим, что функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ можно разложить в ряды по $\sin\frac{k\pi}{l}x$ на отрезке $[0, l]$ такие, что равномерно сходятся ряды из модулей их членов.

Из теории тригонометрических рядов известно, что это всегда возможно, если функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ непрерывны вместе с их первыми производными и если значения этих функций на концах отрезка $[0, l]$ равны нулю. Предположим, что эти условия выполнены. Тогда ряд (10,20) абсолютно и равномерно сходится при $0 \leqslant x \leqslant l$ и при любых t, так как $\sin\frac{k\pi}{l}t$ и $\cos\frac{k\pi}{l}t$ по абсолютной величине не больше 1. Отсюда следует, что функция $u(t, x)$, определенная рядом (10,20), непрерывна и удовлетворяет первому начальному условию (2,20) и граничным условиям (3,20). Но отсюда нельзя еще заключить, что эта функция удовлетворяет второму начальному условию (2,20) и уравнению (1,20). Такое заключение можно было бы сделать, если бы ряд (10,20) можно было дифференцировать почленно два раза по x и два раза по t. Как известно, почленное дифференцирование будет законно в том случае, если полученные после него ряды сходятся равномерно в $Ц_T$. Это последнее условие будет заведомо выполнено при всяком T, даже при $T=\infty$, если функция φ_0 имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно на всем отрезке $[0, l]$ и обращается на концах этого отрезка в нуль вместе со своими производными первого и второго порядка, а функция φ_1 имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно на $[0, l]$ и обращается в нуль на концах этого отрезка вместе со своей производной первого порядка*). В этом случае

$$A_k = O\left(\frac{1}{k^4}\right) \text{ и } B_k = O\left(\frac{1}{k^4}\right)^{**)}.$$

2. На практике при применении метода Фурье обычно не заботятся о том, чтобы ряд (10,20) можно было дифференцировать почленно два раза по x и по t. Довольствуются только тем, чтобы функции φ_0 и φ_1 были непрерывными вместе с их первыми производными и чтобы сами эти функции обращались в нуль на концах отрезка $[0, l]$. Это, как мы видели, обеспечивает равномерную и абсолютную сходимость ряда (10,20) во всем прямоугольнике $Ц_T$. Если при заданных φ_0 и φ_1 в прямоугольнике $Ц_T$ существует непрерывное вместе с его производными первых двух порядков решение $u(t, x)$ рассматриваемой задачи, то последователь-

---

*) Эти ограничения на φ_0 и φ_1 могут быть ослаблены (см. § 23).

**) Через $O[\varphi(n)]$ мы обозначаем такую функцию $\psi(n)$, что отношение $\frac{\psi(n)}{\varphi(n)}$ остается ограниченным при $n\to\infty$. Эти оценки легко получить, преобразуя коэффициенты A_k и B_k интегрированием по частям.

ность частичных сумм $S_k(t, x)$ ряда (10,20) сходится к нему равномерно в $Ц_T$. Действительно, из теории тригонометрических рядов известно, что ряд Фурье для всякой функции с интегрируемым квадратом сходится к ней в среднем. Поэтому из самого построения ряда (10,20) следует, что

$$\int_0^l [S'_{k_x}(0, x) - \varphi'_0(x)]^2\,dx \longrightarrow 0 \quad \text{и} \quad \int_0^l [S'_{k_t}(0, x) - \varphi_1(x)]^2\,dx \to 0$$

при $k \longrightarrow \infty$. На основании замечания 3 к § 19 отсюда следует, что равномерно в $\overline{Ц}_T$

$$S_k(t, x) \longrightarrow u(t, x).$$

3. Каждая из функций

$$u_k(t, x) = X_k(x)\,T_k(t) =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{k\pi}{l}x \left(A_k \cos\frac{k\pi}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi}{l}t\right) =$$
$$= D_k \sin\frac{k\pi}{l}x \sin\frac{k\pi}{l}(t + t_k) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

описывает так называемые *собственные колебания* струны, закрепленной на концах. При собственных колебаниях, соответствующих $k = 1$, струна издает основной, самый низкий, тон. При колебаниях, соответствующих бо́льшим k, она издает более высокие тоны, «обертоны». Если струна колеблется по закону

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{n} D_k \sin\frac{k\pi}{l}x \sin\frac{k\pi}{l}(t + t_k),$$

то она одновременно издает звуки разных высот, соответствующих отдельным членам этой суммы.

§ 21. Общий метод Фурье (предварительное рассмотрение)

Метод Фурье (иначе называемый методом разделения переменных) для решения смешанной краевой задачи применим только к некоторому специальному классу линейных уравнений второго порядка, хотя задача разрешима для значительно более широкого класса уравнений.