ность частичных сумм $S_k(t, x)$ ряда (10,20) сходится к нему равномерно в $Ц_T$. Действительно, из теории тригонометрических рядов известно, что ряд Фурье для всякой функции с интегрируемым квадратом сходится к ней в среднем. Поэтому из самого построения ряда (10,20) следует, что

$$\int_0^l [S'_{k_x}(0, x) - \varphi'_0(x)]^2\,dx \longrightarrow 0 \quad \text{и} \quad \int_0^l [S'_{k_t}(0, x) - \varphi_1(x)]^2\,dx \to 0$$

при $k \longrightarrow \infty$. На основании замечания 3 к § 19 отсюда следует, что равномерно в $\overline{Ц}_T$

$$S_k(t, x) \longrightarrow u(t, x).$$

3. Каждая из функций

$$u_k(t, x) = X_k(x)\,T_k(t) =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{k\pi}{l}x\left(A_k\cos\frac{k\pi}{l}t + B_k\sin\frac{k\pi}{l}t\right) =$$
$$= D_k\sin\frac{k\pi}{l}x\,\sin\frac{k\pi}{l}(t + t_k) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

описывает так называемые *собственные колебания* струны, закрепленной на концах. При собственных колебаниях, соответствующих $k = 1$, струна издает основной, самый низкий, тон. При колебаниях, соответствующих бо́льшим k, она издает более высокие тоны, «обертоны». Если струна колеблется по закону

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{n} D_k\sin\frac{k\pi}{l}x\,\sin\frac{k\pi}{l}(t + t_k),$$

то она одновременно издает звуки разных высот, соответствующих отдельным членам этой суммы.

§ 21. Общий метод Фурье (предварительное рассмотрение)

Метод Фурье (иначе называемый методом разделения переменных) для решения смешанной краевой задачи применим только к некоторому специальному классу линейных уравнений второго порядка, хотя задача разрешима для значительно более широкого класса уравнений.

В настоящем параграфе мы дадим изложение метода без строгого обоснования полученных результатов. Обоснование метода Фурье будет дано в последующих параграфах. Впервые строгое обоснование метода Фурье было дано В. А. Стекловым *).

Итак, рассмотрим гиперболическое уравнение вида

$$A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+C(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+D(t)\frac{\partial u}{\partial t}+E(x)\frac{\partial u}{\partial x}+ \\ +[F_1(t)+F_2(x)]\,u=0, \qquad (1,21)$$

где коэффициенты A, C, D, E, F_1, F_2 — достаточно гладкие функции, причем $A(t)>a_0>0$, $C(x)<c_0<0$; здесь a_0 и c_0 — постоянные. Предположение, что одни из этих коэффициентов зависят только от t, другие — только от x, а коэффициент при $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}$ равен нулю, определяет класс гиперболических уравнений, для которых смешанная краевая задача может быть решена методом Фурье.

Пусть требуется найти дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1,21), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0,\ x)=\varphi_0(x),\quad u_t'(0,\ x)=\varphi_1(x) \qquad (2,21)$$

и граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} A_0u(t,\ 0)+B_0u_x'(t,\ 0)=0,\\ A_1u(t,\ l)+B_1u_x'(t,\ l)=0,\end{aligned}\right\} \qquad (3,21)$$

где постоянные A_0, B_0, A_1, B_1 таковы, что $A_0^2+B_0^2\neq 0$ и $A_1^2+B_1^2\neq 0$.

Будем, как в примере § 20, искать сначала нетривиальные решения уравнения (1,21) вида

$$u(t,\ x)=T(t)\,X(x), \qquad (4,21)$$

причем потребуем от этих решений, чтобы они удовлетворяли граничным условиям (3,21), не заботясь пока об удовлетворении начальных условий.

---

*) Результаты В. А. Стеклова изложены в его книге «Основные задачи математической физики», Петроград, 1922.

Если такое решение существует, то, подставляя его в (1,21), получаем уравнение, которому необходимо должны удовлетворять функции $X(x)$ и $T(t)$:

$$A(t)T''X+C(x)TX''+D(t)T'X+E(x)TX'+ \\ +[F_1(t)+F_2(x)]TX=0.$$

Так как функция $X(x)$ не равна тождественно нулю, то найдется точка x_0 такая, что $X(x_0)\neq 0$; при всех t должно выполняться равенство

$$A(t)T''+D(t)T'+F_1(t)T= \\ =-\frac{C(x_0)X''(x_0)+E(x_0)X'(x_0)+F_2(x_0)X(x_0)}{X(x_0)}T=\lambda_1 T,$$

где λ_1 — некоторая постоянная. Точно так же получим, что функция $X(x)$ при всех x должна удовлетворять уравнению

$$C(x)X''+E(x)X'+F_2(x)X=\lambda_2 X,$$

где λ_2 — постоянная. Так как для всех точек x и t, где $X(x)\neq 0$ и $T(t)\neq 0$,

$$A(t)\frac{T''}{T}+D(t)\frac{T'}{T}+F_1(t)= \\ =-C(x)\frac{X''}{X}-E(x)\frac{X'}{X}-F_2(x), \quad (5,21)$$

то $\lambda_1=-\lambda_2=-\lambda$, и мы получаем для функций $X(x)$ и $T(t)$ следующие уравнения:

$$A(t)T''+D(t)T'+F_1(t)T+\lambda T=0, \quad (6,21)$$

$$C(x)X''+E(x)X'+F_2(x)X-\lambda X=0. \quad (7,21)$$

Так как $T(t)\not\equiv 0$, то для того чтобы функция (4,21) удовлетворяла граничным условиям (3,21), необходимо выполнение условий

$$\left.\begin{aligned} A_0X(0)+B_0X'(0)=0, \\ A_1X(l)+B_1X'(l)=0. \end{aligned}\right\} \quad (8,21)$$

Нахождение нетривиальных решений уравнения (7,21), удовлетворяющих условиям (8,21), называется *задачей о собственных значениях*. Эта задача не при всяком λ имеет отличное от тождественного нуля (нетривиальное) решение.

Те значения λ, при которых существует нетривиальное решение, называются *собственными значениями* (числами) этой задачи, а само нетривиальное решение называется *собственной функцией,* соответствующей данному собственному значению. Совокупность всех собственных значений называется *спектром* данной задачи.

В следующем параграфе будет показано, что собственные значения нашей задачи представляют собой бесконечную последовательность

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$$

Каждому собственному значению λ_k соответствует собственная функция $X_k(x)$, которая, в силу однородности уравнения (7,21) и условий (8,21), определяется с точностью до произвольного числового множителя. Выберем этот множитель так, чтобы

$$\int_0^l \rho(x) X_k^2(x)\, dx = 1, \tag{9,21}$$

где $\rho(x) > 0$ — некоторая фиксированная для данного уравнения функция, которая будет определена в следующем параграфе.

Далее будет показано, что собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, «*ортогональны с весом* ρ», т. е. удовлетворяют равенствам

$$\int_0^l \rho(x) X_k(x) X_l(x)\, dx = 0 \quad \text{при } k \neq l. \tag{10,21}$$

Для каждого собственного значения λ_k решаем уравнение (6,21). Общее решение уравнения (6,21) при $\lambda = \lambda_k$ (обозначим его $T_k(t)$) представляет собой произвольную линейную комбинацию двух каких-либо линейно независимых частных решений $T_k^*(t)$ и $T_k^{**}(t)$:

$$T_k(t) = C_1 T_k^*(t) + C_2 T_k^{**}(t).$$

Подберем T_k^* и T_k^{**} так, чтобы они удовлетворяли следующим начальным условиям при $t = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &T_k^*(0) = 1; \quad T_k^{*\prime}(0) = 0; \\ &T_k^{**}(0) = 0; \quad T_k^{**\prime}(0) = 1, \end{aligned}\right\} \tag{11,21}$$

и положим

$$u_k(t,\ x) = T_k(t) \cdot X_k(x).$$

Функции $u_k(t,\ x)$ при любом k удовлетворяют уравнению (1,21) и граничным условиям (3,21).

Чтобы удовлетворить начальным условиям (2,21), составим ряд

$$u(t,\ x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\left[A_k T_k^{*}(t) + B_k T_k^{**}(t)\right]. \qquad (12,21)$$

Если этот ряд сходится равномерно, так же как и ряды, получающиеся из него двукратным почленным дифференцированием по t и по x, то сумма его, очевидно, будет удовлетворять уравнению (1,21) и граничным условиям (3,21). Для выполнения начальных условий (2,21) необходимо, чтобы

$$u(0,\ x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) = \varphi_0(x), \qquad (13,21)$$

$$u_t'(0,\ x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k X_k(x) = \varphi_1(x). \qquad (14,21)$$

Предполагая, что ряды (13,21) и (14,21) сходятся равномерно, мы можем определить коэффициенты A_m и B_m, умножив обе части равенств (13,21) и (14,21) на $\rho X_m(x)$ и проинтегрировав по x в интервале от 0 до l. В силу (9,21) и (10,21) мы получим

$$A_m = \int_0^l \rho(x)\,\varphi_0(x)\,X_m(x)\,dx,$$

$$B_m = \int_0^l \rho(x)\,\varphi_1(x)\,X_m(x)\,dx.$$

Подставив такие значения коэффициентов в ряд (12,21), мы, очевидно, получим решение нашей задачи, если ряд (12,21) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по x и по t до двух раз включительно, равномерно сходятся.

Замечание. Мы указали общую схему применения метода Фурье к решению смешанной задачи для уравнения (1,21); эта схема применима также и в случае многих пространственных переменных для гиперболических уравнений специального вида (см. § 25).

§ 22. Общие свойства собственных функций и собственных значений

1. Для исследования свойств собственных функций и собственных значений покажем прежде всего, что уравнение (7,21)

$$C(x)X''(x)+E(x)X'(x)+F_2(x)X(x)-\lambda X(x)=0$$

предыдущего параграфа можно привести к виду

$$[p(x)X'(x)]'-q(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0, \qquad (1,22)$$

умножив его на подходящим образом подобранную функцию от x.

Во всем дальнейшем будем предполагать, что $C(x)<c_0<0$, где c_0 — постоянная. Умножив тогда (7,21) на $\rho(x)$, получим

$$\rho CX''+\rho EX'+\rho F_2X-\lambda\rho X=0.$$

Для того чтобы первые два члена можно было записать в виде

$$[p(x)X']',$$

должно быть

$$(\rho C)'=\rho E.$$

Определив $\rho(x)$ из этого дифференциального уравнения, получаем

$$\rho(x)=e^{\int\limits_{x_0}^{x}\frac{E-C'}{C}dx}>0$$

(мы взяли частное решение дифференциального уравнения для $\rho(x)$). Вводя теперь обозначения

$$\rho C=-p \text{ и } \rho F_2=q,$$

мы можем записать наше уравнение в виде (1,22). Из сделанных предположений следует, что $p(x)>p_0$, $\rho(x)>\rho_0$, где p_0 и ρ_0 — положительные постоянные.