Замечание. Мы указали общую схему применения метода Фурье к решению смешанной задачи для уравнения (1,21); эта схема применима также и в случае многих пространственных переменных для гиперболических уравнений специального вида (см. § 25).

§ 22. Общие свойства собственных функций и собственных значений

1. Для исследования свойств собственных функций и собственных значений покажем прежде всего, что уравнение (7,21)

$$C(x)X''(x)+E(x)X'(x)+F_2(x)X(x)-\lambda X(x)=0$$

предыдущего параграфа можно привести к виду

$$[p(x)X'(x)]'-q(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0, \qquad (1,22)$$

умножив его на подходящим образом подобранную функцию от x.

Во всем дальнейшем будем предполагать, что $C(x)<c_0<0$, где c_0 — постоянная. Умножив тогда (7,21) на $\rho(x)$, получим

$$\rho CX''+\rho EX'+\rho F_2X-\lambda\rho X=0.$$

Для того чтобы первые два члена можно было записать в виде

$$[p(x)X']',$$

должно быть

$$(\rho C)'=\rho E.$$

Определив $\rho(x)$ из этого дифференциального уравнения, получаем

$$\rho(x)=e^{\int\limits_{x_0}^{x}\frac{E-C'}{C}dx}>0$$

(мы взяли частное решение дифференциального уравнения для $\rho(x)$). Вводя теперь обозначения

$$\rho C=-p \text{ и } \rho F_2=q,$$

мы можем записать наше уравнение в виде (1,22). Из сделанных предположений следует, что $p(x)>p_0$, $\rho(x)>\rho_0$, где p_0 и ρ_0 — положительные постоянные.

Будем считать, что $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ и $\rho(x)$ непрерывны при $0 \leqslant x \leqslant l$.

2. Итак, мы будем рассматривать задачу о собственных значениях — найти нетривиальное решение уравнения (1,22), удовлетворяющее условиям

$$\left.\begin{aligned} A_0 X(0) + B_0 X'(0) &= 0, \\ A_1 X(l) + B_1 X'(l) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2,22}$$

где $A_0^2 + B_0^2 \neq 0$ и $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$.

Теорема 1. *Если $X_1(x)$ и $X_2(x)$ — собственные функции, отвечающие одному и тому же собственному значению λ, то $X_1(x) = cX_2(x)$, где c — постоянная.*

Действительно, так как $X_1(x)$ и $X_2(x)$, по предположению, удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} A_0 X_1(0) + B_0 X_1'(0) &= 0, \\ A_0 X_2(0) + B_0 X_2'(0) &= 0 \end{aligned}$$

и $A_0^2 + B_0^2 \neq 0$, то определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_1' & X_2' \end{vmatrix}$$

решений X_1 и X_2 уравнения (1,22) в точке $x = 0$ обращается в нуль, и следовательно, функции $X_1(x)$ и $X_2(x)$ линейно зависимы.

В дальнейшем мы будем предполагать собственные функции нормированными с весом ρ, т. е. выбранными так, чтобы

$$\int_0^l \rho(x)\,[X(x)]^2\,dx = 1. \tag{3,22}$$

Такую функцию $X(x)$ можно получить, умножив произвольную собственную функцию $\tilde{X}(x)$ на число

$$\frac{1}{\sqrt{\int_0^l \rho(x)\,[\tilde{X}(x)]^2\,dx}}.$$

Очевидно, что при данном собственном значении нормированная собственная функция определяется с точностью до знака.

Теорема 2. *Собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны с весом* $\rho(x)$, *т. е. если* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *и* $X_i(x)$ — *собственная функция, соответствующая собственному значению* λ_i $(i = 1, 2)$, *то*

$$\int_0^l \rho(x) X_1(x) X_2(x)\, dx = 0. \tag{4,22}$$

Доказательство. Выпишем тождества

$$(pX_1')' - qX_1 + \lambda_1 \rho X_1 = 0,$$
$$(pX_2')' - qX_2 + \lambda_2 \rho X_2 = 0.$$

Умножим первое из них на X_2, а второе на X_1 и вычтем одно из другого. Мы получим тождество

$$[pX_1']' X_2 - [pX_2']' X_1 + (\lambda_1 - \lambda_2) \rho X_1 X_2 = 0.$$

Интегрируя это тождество в пределах от нуля до l, получим (с помощью интегрирования по частям)

$$\int_0^l (\lambda_2 - \lambda_1) \rho X_1 X_2\, dx =$$
$$= pX_1' X_2 \Big|_0^l - pX_2' X_1 \Big|_0^l - \int_0^l pX_1' X_2'\, dx + \int_0^l pX_2' X_1'\, dx.$$

Правая часть этого равенства равна нулю, так как последние два слагаемых взаимно уничтожаются, а

$$p(l)\,[X_1'(l) X_2(l) - X_2'(l) X_1(l)] = 0$$

и

$$p(0)\,[X_1'(0) X_2(0) - X_2'(0) X_1(0)] = 0$$

в силу условий (2,22). Поэтому

$$\int_0^l \rho X_1 X_2\, dx = 0,$$

так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

3. Для упрощения дальнейшего изложения ограничимся рассмотрением краевых условий

$$X(0)=0, \quad X(l)=0. \tag{5,22}$$

Задача нахождения собственных значений будет в этом параграфе сведена к задаче нахождения условного экстремума (минимума) некоторого функционала. Этот функционал выбирается так, что уравнение (1,22) является для него уравнением Лагранжа — Эйлера *).

Рассмотрим два квадратичных функционала от функции $X(x)$

$$D(X)=\int_0^l (pX'^2+qX^2)\,dx,$$

$$H(X)=\int_0^l \rho X^2\,dx.$$

Функционалы

$$D(X_1, X_2)=\int_0^l (pX_1'X_2'+qX_1X_2)\,dx,$$

$$H(X_1, X_2)=\int_0^l \rho X_1X_2\,dx$$

называются *билинейными функционалами*, соответствующими данным квадратичным. Имеет место следующая

Теорема 3. *Если λ — собственное значение рассматриваемой задачи о собственных значениях, а X_λ — соответствующая ему нормированная собственная функция, то для любой непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям* (5,22),

$$D(X_\lambda, f)=\lambda\int_0^l \rho X_\lambda f\,dx=\lambda H(X_\lambda, f).$$

---

*) См. М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник, Курс вариационного исчисления, изд. 2-е, Гостехиздат, 1950.

Доказательство. Интегрируя по частям, используя условия (5,22) для функции f и уравнение (1,22), получим

$$D(X_\lambda, f) = \int_0^l (pX_\lambda' f' + qX_\lambda f)\,dx =$$

$$= pX_\lambda' f\Big|_0^l - \int_0^l [(pX_\lambda')' - qX_\lambda] f\,dx = \lambda \int_0^l \rho X_\lambda f\,dx =$$

$$= \lambda H(X_\lambda, f).$$

Следствие. Пусть $X_i(x)$ — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_i. Тогда

$$D(X_i) = \lambda_i, \quad D(X_i, X_j) = 0, \text{ если } i \neq j.$$

Теорема 4. *Отношение* $\frac{D(X)}{H(X)}$ *(при* $X \not\equiv 0$*) ограничено снизу и, следовательно, имеет точную нижнюю грань.*

Действительно,

$$D(X) = \int_0^l (pX'^2 + qX^2)\,dx \geqslant \int_0^l qX^2\,dx =$$

$$= \int_0^l \frac{q}{\rho} \rho X^2\,dx \geqslant \min_{0 \leqslant x \leqslant l} \frac{q(x)}{\rho(x)} H(X).$$

Если рассматривать функции, удовлетворяющие условию $H(X) = 1$, то для них будут ограничены снизу значения самого функционала $D(X)$. А так как всякое собственное значение $\lambda = D(X_\lambda)$, если $H(X_\lambda) = 1$, то мы получаем отсюда важное следствие: *собственные значения нашей задачи ограничены снизу.*

Рассмотрим задачу о нахождении минимума функционала $D(X)$ при условии $H(X) = 1$. За класс допустимых функций примем множество дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ функций $X(x)$, удовлетворяющих условиям (5,22). *Предположим, что этот минимум достигается в классе допустимых функций* *). Тогда осуществляющая его функция должна, как известно из курса вариационного

*) Доказательство существования решения этой задачи, как и всех других вариационных задач, о которых будет говориться в этой главе, см. в дополнении И. М. Гельфанда и Г. А. Сухомлинова

исчисления, удовлетворять при некотором λ уравнению Лагранжа — Эйлера для функционала

$$D(X)-\lambda H(X)=\int_0^l [pX'^2+qX^2-\lambda\rho X^2]\,dx=$$

$$=\int_0^l F(x,\ X,\ X')\,dx,$$

т. е. уравнению вида

$$\frac{\partial F}{\partial X}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial X'}=0,$$

которое в нашем случае совпадает с уравнением (1,22). Краевые условия задачи о собственных значениях и рассматриваемой вариационной задачи также совпадают. Поэтому функция $X_1(x)$, дающая экстремум $D(X)$ при условии $H(X)=1$, является собственной функцией исходной задачи о собственных значениях. Так как всегда $D(X_\lambda)=\lambda$ по теореме 3, то, очевидно, собственное значение, которому соответствует $X_1(x)$, должно быть наименьшим. Обозначим его через λ_1.

Покажем, что функция $X(x)$, дающая минимум функционалу $D(X)$ в классе допустимых функций, удовлетворяющих всем прежним условиям и еще дополнительному условию

$$\int_0^l \rho X_1 X\,dx=0,$$

является собственной функцией, соответствующей второму по величине собственному значению.

В самом деле, функция, осуществляющая указанный минимум, должна удовлетворять уравнению Лагранжа — Эйлера

к книге М. А. Лаврентьева и Л. А. Люстерника «Основы вариационного исчисления», т. 1, ч. II (1935 г.).

В вариационном исчислении доказывается, что если бы мы потребовали от допустимых функций существования непрерывных производных только первого порядка, то рассматриваемая вариационная задача все равно имела бы решение. Ее решение обязательно имело бы непрерывные производные второго порядка и потому совпадало бы с решением той же задачи в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций.

для функционала

$$D(X) - \lambda H(X) - \mu \int_0^l \rho X_1 X\, dx,$$

которое в данном случае может быть записано в виде

$$(pX')' - qX + \lambda\rho X + \frac{1}{2}\mu\rho X_1 = 0; \qquad (6,22)$$

λ и μ — некоторые постоянные.

Покажем, что $\mu = 0$. Для доказательства напишем уравнение (1,22), заменив λ на λ_1 и X на X_1:

$$(pX_1')' - qX_1 + \lambda_1\rho X_1 = 0. \qquad (7,22)$$

Умножим (6,22) на X_1, (7,22) на X, вычтем одно из другого и проинтегрируем от 0 до l. Повторив интегрирование по частям, проведенное при доказательстве ортогональности, и пользуясь тем, что $\int_0^l \rho X_1 X\, dx = 0$, мы получим

$$\mu \int_0^l \rho X_1^2\, dx = 0,$$

откуда следует

$$\mu = 0.$$

Следовательно, уравнение (6,22) имеет вид

$$(pX')' - qX + \lambda\rho X = 0,$$

и X является собственной функцией. Обозначим ее через $X_2(x)$. Покажем, что собственное значение λ_2, соответствующее этой функции, есть ближайшее к λ_1 собственное значение. Очевидно, $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$, так как от увеличения числа условий на допустимые функции минимум $D(X)$ может только увеличиться. Значение λ_2 не может быть равным λ_1, так как тогда $X_2(x)$ по теореме 1 была бы равной $\pm X_1(x)$, что противоречит условию $\int_0^l X_1 X\, dx = 0$. Следовательно, $\lambda_2 > \lambda_1$.

Покажем, что между λ_2 и λ_1 нет других собственных значений. Действительно, если бы существовала тройка соб-

ственных значений $\lambda_2 > \tilde{\lambda} > \lambda_1$, соответствующих собственным функциям X_2, $\tilde{X}$, X_1, то, как легко видеть, не функция X_2, а функция $\tilde{X}$ осуществляла бы решение только что рассмотренной вариационной задачи согласно следствию из теоремы 3.

Совершенно аналогичным образом показывается, что функция $X_n(x)$, дающая минимум $D(X)$ в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих соотношениям (5,22) и условиям

$$H(X) = 1, \quad \int_0^l \rho X_j X\, dx = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где $X_j(x)$ есть j-я собственная функция, является собственной функцией, соответствующей n-му по величине собственному значению.

Таким образом дан способ последовательного нахождения собственных чисел и собственных функций. Так как в дальнейшем будет показано, что $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то отсюда следует, что таким образом могут быть найдены все собственные числа и собственные функции.

4. Можно указать метод, дающий возможность сразу отыскать n-е собственное значение и n-ю собственную функцию без предварительного нахождения предшествующих собственных функций. Этот метод дается следующей *теоремой Куранта:*

Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_{n-1}(x)$ — произвольная система непрерывных функций на отрезке $[0, l]$. Обозначим через $\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ минимум функционала $D(X)$ в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на концах отрезка и удовлетворяющих следующим дополнительным условиям:

$$H(X) = 1, \tag{8,22}$$

$$\int_0^l \rho \varphi_i X\, dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{9,22}$$

Тогда n-е собственное значение λ_n для рассмотренной выше задачи о собственных значениях равно верхней грани значений $\lambda(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ при всевозможном выборе функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$.

Доказательство. Так как согласно предыдущему

$$\lambda(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \lambda_n,$$

то достаточно показать, что при любом выборе $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$

$$\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \leqslant \lambda_n.$$

Покажем, что при произвольной системе $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ можно указать такую допустимую функцию $\tilde{X}(x)$, удовлетворяющую условиям (5,22), (8,22) и (9,22), что

$$D(\tilde{X}) \leqslant \lambda_n.$$

Отсюда будет следовать, что

$$\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \leqslant \lambda_n$$

и теорема будет доказана.

Функцию $\tilde{X}(x)$ будем искать в виде

$$\tilde{X}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k X_k(x).$$

Очевидно, что такая функция при любых c_k будет обращаться в нуль при $x=0$ и $x=l$ и будет иметь непрерывные производные до второго порядка включительно. Подберем коэффициенты c_k так, чтобы удовлетворялись условия (8,22) и (9,22). Подставляя $\tilde{X}$ в (8,22) и пользуясь тем, что $H(X_i, X_k)=0$ при $i \neq k$ (свойство ортогональности собственных функций), мы получим

$$H(\tilde{X}) = \int_0^l \rho \tilde{X}^2\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = 1. \qquad (10,22)$$

Условия (9,22) дают систему уравнений

$$\int_0^l \rho\varphi_i \tilde{X}\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_0^l \rho\varphi_i X_k\, dx = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1).$$

Это — система $n-1$ линейных уравнений с n неизвестными c_k. Она всегда имеет нетривиальные решения. Пронорми-

ровав одно такое решение с помощью (10,22), мы выберем функцию $\bar{X}(x)$. Найдем $D(\bar{X})$:

$$D(\bar{X})=\int_0^l\left[p\left(\sum_{k=1}^n c_kX_k'\right)^2+q\left(\sum_{k=1}^n c_kX_k\right)^2\right]dx=$$

$$=\int_0^l\left(p\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n c_kc_lX_k'X_l'+q\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n c_kc_lX_kX_l\right)dx=$$

$$=\sum_{k=1}^n c_k^2D(X_k)+\sum_{k\neq l}c_kc_lD(X_k,\ X_l)=$$

$$=\sum_{k=1}^n c_k^2D(X_k)=\sum_{k=1}^n c_k^2\lambda_k\leqslant\lambda_n\sum_{k=1}^n c_k^2\,{}^{*)}=\lambda_n,$$

что и требовалось доказать

Замечание. Вместо того чтобы искать минимум функционала $D(X)$ при условиях (8,22) и (9,22), можно искать минимум отношения $\frac{D(X)}{H(X)}$ при условиях (9,22). Минимальное значение будет одно и то же; только во втором случае экстремальная функция будет определена с точностью до постоянного множителя.

5. Для дальнейшего исследования собственных значений и собственных функций выясним, как изменяются собственные значения при изменении коэффициентов уравнения (1,22) и отрезка, на котором рассматриваются решения.

а) *При изменении коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ в определенную сторону собственные значения меняются в ту же сторону.* Точнее, если имеем два уравнения

$$(pX')'-qX+\lambda\rho X=0,$$

$$(p^*X')'-q^*X+\lambda\rho X=0,$$

причем

$$p(x)\leqslant p^*(x),\qquad q(x)\leqslant q^*(x),$$

то $\lambda_n\leqslant\lambda_n^*$, где λ_n и λ_n^* — соответственно n-е собственные значения первого и второго уравнений.

---

*) Так как $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n$.

Доказательство непосредственно вытекает из того, что

$$D(X)=\int_0^l (pX'^2+qX^2)\,dx\leqslant\int_0^l (p^*X'^2+q^*X^2)\,dx=D^*(X).$$

Поэтому $\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})\leqslant\lambda^*(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$, так как класс допустимых функций $X(x)$ не изменился, и следовательно, $\lambda_n\leqslant\lambda_n^*$.

б) *При изменении коэффициента $\rho(x)$ в определенную сторону собственные значения меняются в противоположную сторону.*

Пусть $\rho(x)\leqslant\rho^*(x)$, а остальные коэффициенты уравнения не изменены. Тогда для всякой функции $X(x)$

$$D(X)=D^*(X), \text{ а } H(X)\leqslant H^*(X).$$

Поэтому

$$\frac{D(X)}{H(X)}\geqslant\frac{D^*(X)}{H^*(X)}. \tag{11,22}$$

Всякая функция $X(x)$, удовлетворяющая условиям (9,22) при некоторых $\varphi_i(x)$, будет удовлетворять аналогичным условиям

$$\int_0^l \rho^*(x)\varphi_i^*(x)\,X(x)\,dx=0,$$

если положить

$$\varphi_i^*(x)=\frac{\rho(x)}{\rho^*(x)}\,\varphi_i(x).$$

Отсюда и из неравенства (11,22) заключаем, что

$$\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})\geqslant\lambda^*(\overset{*}{\varphi}_1, \ldots, \overset{*}{\varphi}_{n-1}).$$

А так как $\rho^*(x)\geqslant\rho(x)>\rho_0>0$, то совокупность всех $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ совпадет с совокупностью всех $(\overset{*}{\varphi}_1(x), \ldots, \overset{*}{\varphi}_n(x))$ и потому $\lambda_n\geqslant\lambda_n^*$.

в) *При уменьшении отрезка $[0, l]$ собственные значения не убывают.* Точнее, если в рассматриваемой нами задаче о собственных значениях отрезок $[0, l]$ заменить отрезком $[0, l^*]$, где $l^*<l$, и собственные значения новой задачи обозначить через λ^*, то $\lambda_n^*\geqslant\lambda_n$.

Действительно, $\lambda^*(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$, которое играет роль $\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ в новой задаче, будет совпадать с миниму-

мом функционала $D(X)$, определенного для отрезка $[0, l]$, если кроме условий (8,22) и (9,22) на класс допустимых функций $X(x)$ наложить еще требование $X(x) \equiv 0$ при $l^* \leqslant x \leqslant l$. Но при усилении условий уменьшается класс допустимых функций, и минимум функционала может только увеличиться *).

Следовательно, $\lambda^*(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \geqslant \lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$. А поэтому и $\lambda_n^* \geqslant \lambda_n$.

Обращаясь к конкретному примеру, рассмотренному в § 20, мы можем вывести отсюда известную связь между длиной струны и высотой ее основного тона: чем короче струна, тем больше частота ее собственных колебаний $\left(\text{равная } \frac{k\pi}{l}\right)$, тем выше издаваемый ею звук.

6. Совершенно тем же методом, каким мы исследовали собственные значения для уравнения (1,22) при краевых условиях

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{5,22}$$

можно исследовать собственные значения для уравнения (1,22) при краевых условиях

$$X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0, \tag{12,22}$$

или при краевых условиях

$$X'(0) - \sigma_0 X(0) = 0, \quad X'(l) + \sigma_l X(l) = 0, \tag{13,22}$$

где $\sigma_0 \geqslant 0$ и $\sigma_l \geqslant 0$, или при краевом условии одного из указанных здесь типов на одном конце интервала $(0, l)$ и другого типа на другом конце.

Основной теоремой, дающей возможность исследовать собственные значения при краевых условиях (13,22), является следующая теорема, аналогичная теореме пункта 4:

Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ — *произвольная система непрерывных функций на отрезке* $[0, l]$. *Обозначим*

---

*) Требуя от непрерывных на $[0, l]$ вместе с их первыми двумя производными функций $X(x)$, чтобы они обращались в нуль при $l^* \leqslant x \leqslant l$, мы тем самым требуем, чтобы при $x = l^*$ обращалась в нуль не только сама функция $X(x)$, но и ее первые две производные. Однако можно показать, что это дополнительное требование не меняет минимума $D(X)$ на отрезке $[0, l^*]$.

через $\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ *минимум функционала*

$$\int_0^l (pX'^2 + qX^2)\,dx + \sigma_0 p(0) X^2(0) + \sigma_l p(l) X^2(l) \quad (14,22)$$

в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$H(X) = 1, \quad \int_0^l \rho\varphi_i X\,dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \quad (15,22)$$

Тогда n-е собственное значение λ_n *для рассматриваемой задачи о собственных значениях равно верхней грани значений* $\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ *при всевозможном выборе функций* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, *лишь бы они оставались непрерывными.*

Пользуясь этой теоремой, можно так же, как и в случае закрепленных концов, исследовать зависимость собственных значений от $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$, σ_0, σ_l, l.

Если за функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ принять первые $n-1$ собственные функции $X_1, \ldots, X_{n-1}$ рассматриваемой задачи, то функция, дающая минимум функционала (14,22) при условиях (15,22), будет n-й собственной функцией этой задачи, а минимум функционала будет ее n-м собственным значением.

Если $\sigma_0 = 0$ и $\sigma_l = 0$, то мы придем к задаче о собственных значениях для уравнения (1,22) при краевых условиях (12,22). В этом случае n-я собственная функция будет давать минимум $D(X)$ в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих таким же условиям

$$H(X) = 1, \quad \int_0^l \rho X_j X\,dx = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где $X_1, \ldots, X_{n-1}$ — первые собственные функции этой задачи, как и в случае закрепленных концов. Но теперь от допустимых функций не требуется, чтобы они удовлетворяли какому-либо условию на концах интервала $(0, l)$. Функция, решающая эту вариационную задачу, автоматически удовлетворяет условиям (12,22). Это «свободная задача». Она соответствует колебаниям струны, которая свободна, т. е. не закреплена на концах. Напомним, однако, что, когда мы говорим, что струна не закреплена на концах, это значит только, что эти концы могут как угодно двигаться по прямой, перпендикулярной к положению равновесия струны, но

это отнюдь не значит, что эти концы могут сближаться вдоль положения равновесия.

Если от допустимых функций не требовать непрерывности в какой-нибудь внутренней точке c интервала $(0, l)$, то класс допустимых функций расширяется; $\lambda(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$, а следовательно, и λ_n от этого может только уменьшиться. Соответствующий тон, издаваемый струной, понизится. Это соответствует разрыву струны в какой-либо внутренней точке c. Тогда концы обеих частей струны, оставаясь на одной и той же прямой, перпендикулярной к положению неподвижной натянутой струны, могут свободно передвигаться по этой прямой. Соответствующая собственная функция X_n будет иметь в точке c разрыв первого рода; при этом будет

$$X_n'(c+0)=0 \text{ и } X_n'(c-0)=0.$$

Из предыдущего следует, что тоны струны при этом понизятся по сравнению с соответствующими тонами целой струны.

7. Мы ограничимся опять рассмотрением краевых условий вида (5,22), так как в других случаях можно применить совершенно аналогичные рассуждения.

Дадим оценку λ_n в зависимости от n. Обозначим максимумы функций $p(x)$, $q(x)$ и $\rho(x)$ на отрезке $[0, l]$ соответственно через $p_{\max}$, $q_{\max}$, $\rho_{\max}$, а минимумы — через $p_{\min}$, $q_{\min}$, $\rho_{\min}$ и рассмотрим наряду с уравнением (1,22) два уравнения с постоянными коэффициентами

$$p_{\max}X'' - q_{\max}X + \lambda\rho_{\min}X = 0, \tag{16,22}$$

$$p_{\min}X'' - q_{\min}X + \lambda\rho_{\max}X = 0. \tag{17,22}$$

Из результатов п. 5 следует, что

$$\underline{\lambda}_n \leqslant \lambda_n \leqslant \overline{\lambda}_n, \tag{18,22}$$

где $\overline{\lambda}_n$ и $\underline{\lambda}_n$ — соответственно n-е собственные значения уравнений (16,22) и (17,22). Но уравнения (16,22) и (17,22) интегрируются в конечном виде, и значения $\overline{\lambda}_n$ и $\underline{\lambda}_n$ могут быть точно вычислены. Решая, например, (16,22) и находя частное решение этого уравнения из условий $X(0)=X(l)=0$, мы получим

$$\frac{\overline{\lambda}_n\rho_{\min} - q_{\max}}{p_{\max}} = \frac{n^2\pi^2}{l^2}.$$

Отсюда $\overline{\lambda}_n = C_1 n^2 + C_2$, где C_1 и C_2 не зависят от n,

Аналогично

$$\underline{\lambda}_n = c_1 n^2 + c_2.$$

Подставляя эти значения в (18,22), мы получим

$$c_1 n^2 + c_2 \leqslant \lambda_n \leqslant C_1 n^2 + C_2. \qquad (19,22)$$

Отсюда следует, в частности, неограниченное возрастание собственных значений при $n \longrightarrow \infty$.

8. Исследуем теперь поведение собственных функций при возрастании n. Для этого упростим уравнение (1,22) путем замены

$$s = \int_0^x \varphi(x)\,dx, \quad u = \frac{1}{\psi(x)} X. \qquad (20,22)$$

Подберем функции $\varphi(x) > 0$ и $\psi(x) > 0$ таким образом, чтобы уравнение (1,22) после замены (20,22) перешло в уравнение

$$u''(s) + \lambda u = R(s)\,u. \qquad (21,22)$$

Производя подстановку (20,22) при произвольных функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, мы от уравнения (1,22) перейдем к уравнению

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{(\varphi\psi p)' + \varphi\psi' p}{\varphi^2\psi p}\frac{du}{ds} + \lambda\rho\frac{1}{\varphi^2 p}u = \frac{\psi q - (\psi' p)'}{\varphi^2\psi p}u.$$

Выберем теперь функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ так, чтобы это уравнение имело вид (21,22). Для этого нужно определить функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из системы уравнений

$$\frac{\rho}{\varphi^2 p} = 1, \quad (\varphi\psi p)' + \varphi\psi' p = 0.$$

Решив эту систему, получим

$$\varphi = \sqrt{\frac{\rho}{p}}, \quad \psi = \frac{c}{\sqrt[4]{\rho p}},$$

где c — произвольная постоянная.

Поэтому мы можем, например, заменой

$$s = \int_0^x \sqrt{\frac{\rho}{p}}\,dx, \quad u = \sqrt[4]{\rho p}\,X \qquad (22,22)$$

получить уравнение (21,22); $R(s)$ здесь непрерывная функция, если $\rho''(x)$ и $p''(x)$ непрерывны, так как $\varphi^2\psi p \neq 0$.

Решение уравнения (21,22) мы должны искать на интервале $0 < s < l_1$, где $l_1 = \int\limits_0^l \sqrt{\frac{\rho}{p}}\,dx$. Краевые условия для $u(s)$, как легко видеть, останутся те же, что и для $X(x)$:

$$u(0) = 0, \quad u(l_1) = 0.$$

Если $X_n(x)$ — собственная функция уравнения (1,22), соответствующая собственному значению λ_n, то этому же собственному значению соответствует собственная функция u_n уравнения (21,22).

Если

$$\int\limits_0^l \rho X_n^2 dx = 1,$$

то, как легко убедиться,

$$\int\limits_0^{l_1} u_n^2(s)ds = 1. \tag{23,22}$$

Дадим асимптотические формулы для $u_n(s)$ при $n \to \infty$. Так как нас интересует поведение $u_n(s)$ при больших n, то на основании (19,22) мы можем рассматривать только положительные λ_n. Рассмотрим неоднородное уравнение относительно функции $z(s)$

$$z'' + \lambda z = R(s)\,u, \quad \lambda > 0, \tag{24,22}$$

где $u(s)$ есть решение уравнения (21,22) при том же λ. Уравнение (24,22) имеет общее решение

$$z(s) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,s + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,s + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int\limits_0^s R(\tau)\,u(\tau) \sin\sqrt{\lambda}\,(s-\tau)\,d\tau\ ^{*)}.$$

Если положить $C_1 = u(0)$ и $C_2 = \frac{u'(0)}{\sqrt{\lambda}}$, то $z(s)$ будет при

*) См., например, мои «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений», Гостехиздат, 1952, стр. 156.

$s=0$ удовлетворять тем же начальным условиям, что и $u(s)$. Поэтому в силу теоремы о единственности решения задачи Коши для уравнения (24,22) $z(s)$ будет тождественно равно $u(s)$ и мы получим для $u(s)$ интегральное уравнение

$$u(s)=u(0)\cos\sqrt{\lambda}\,s+\frac{u'(0)}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}\,s+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^s R(\tau)\,u(\tau)\sin\sqrt{\lambda}\,(s-\tau)\,d\tau. \qquad (25,22)$$

Пусть теперь λ совпадает с n-м собственным значением; $v_n(s)$ — решение уравнения (21,22) при $\lambda=\lambda_n$, удовлетворяющее начальным условиям

$$v_n(0)=0; \quad v_n'(0)=\sqrt{\lambda_n}.$$

Такая функция $v_n(s)$ будет удовлетворять интегральному уравнению

$$v_n(s)=$$

$$=\sin\sqrt{\lambda_n}\,s+\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^s R(\tau)\,v_n(\tau)\sin\sqrt{\lambda_n}\,(s-\tau)\,d\tau. \qquad (26,22)$$

С точностью до знака она отличается от нормированной собственной функции $u_n(s)$ только множителем:

$$u_n(s)=\frac{v_n(s)}{\sqrt{\int_0^{l_1} v_n^2(s)\,ds}}=N_n v_n.$$

В дальнейшем мы покажем, что

$$N_n\to\sqrt{\frac{2}{l_1}}.$$

Докажем прежде всего, что все функции $v_n(s)$ ограничены некоторой не зависящей от n константой. Для этого обозначим $\max|v_n(s)|$ при $0\leqslant s\leqslant l_1$ через M_n. Тогда из уравнения (26,22) имеем

$$|v_n(s)|\leqslant 1+\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}M_n\int_0^{l_1}|R(\tau)|\,d\tau$$

и, следовательно,

$$M_n \leqslant 1 + \frac{M_n}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{l_1} |R(\tau)|\, d\tau,$$

$$M_n \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{l_1} |R(\tau)|\, d\tau} = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right). \qquad (27,22)$$

Так как $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$ (см. п. 7), то это неравенство доказывает ограниченность функций $v_n(s)$.

Для дальнейшего нам понадобится аналогичная оценка для производных первого и второго порядка от собственных функций. Чтобы получить ее, продифференцируем интегральное уравнение (26,22). Получим

$$v_n'(s) = \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n}\, s + \int_0^s R(\tau)\, v_n(\tau) \cos \sqrt{\lambda_n}(s - \tau)\, d\tau,$$

$$v_n''(s) = -\lambda_n \sin \sqrt{\lambda_n}\, s - \sqrt{\lambda_n} \int_0^s R(\tau)\, v_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n}(s - \tau)\, d\tau + R(s)\, v_n(s),$$

откуда

$$|v_n'(s)| \leqslant \sqrt{\lambda_n} + O(1), \quad |v_n''(s)| \leqslant \lambda_n + O(\sqrt{\lambda_n}). \qquad (28,22)$$

Вычислим теперь $\int_0^{l_1} v_n^2(s)\, ds$, т. е. найдем множитель, которым функции $v_n(s)$ (и, следовательно, их производные) отличаются от нормированных собственных функций $u_n(s)$ (и их соответствующих производных). Из (26,22) имеем

$$v_n^2(s) = \sin^2 \sqrt{\lambda_n}\, s + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right).$$

Отсюда

$$\int_0^{l_1} v_n^2(s)\, ds = \frac{l_1}{2} - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n}\, l_1}{4\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) = \frac{l_1}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right).$$

Отсюда для $u_n(s)$ сразу получаются оценки, аналогичные (27,22) и (28,22):

$$\left.\begin{aligned} |u_n(s)| &\leqslant \sqrt{\frac{2}{l_1}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right), \\ |u_n'(s)| &\leqslant \sqrt{\lambda_n}\sqrt{\frac{2}{l_1}} + O(1), \\ |u_n''(s)| &\leqslant \lambda_n\sqrt{\frac{2}{l_1}} + O(\sqrt{\lambda_n}). \end{aligned}\right\} \qquad (29,22)$$

Заменой переменных по формулам (22,22) отсюда непосредственно получаются соответствующие результаты для $X_n(x)$: ограниченность собственных функций и тот же порядок роста производных при $n \to \infty$, как и у $u_n(s)$.

9. Рассмотрим вопрос о разложении произвольной непрерывной функции $f(x)$, заданной при $0 \leqslant x \leqslant l$, в ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) \qquad (30,22)$$

по собственным функциям $X_1(x), \ldots, X_n(x), \ldots$ уравнения (1,22). Тем же путем, как это делается для обычных тригонометрических рядов, легко показать, что если ряд (30,22) равномерно сходится к функции $f(x)$, то коэффициенты c_n равны коэффициентам Фурье функции $f(x)$ по системе функций $X_1, \ldots, X_n, \ldots$, т. е.

$$c_n = \int_0^l \rho(x) f(x) X_n(x)\, dx \qquad (31,22)$$

(ср. конец § 21).

Поставим теперь в соответствие каждой интегрируемой функции $f(x)$ ее «ряд Фурье» вида (30,22), где коэффициенты c_n определены по формулам (31,22), и исследуем вопрос о сходимости этого ряда.

Сначала докажем, что *для всякой интегрируемой вместе со своим квадратом на отрезке* $[0, l]$ *кусочно непрерывной* *) *функции* $f(x)$ *ряд* (30,22) *сходится к этой*

---

*) То есть имеющей конечное число точек разрыва.

функции «в среднем», т. е. что

$$\int_0^l \rho(x)\left[f(x)-\sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x)\right]^2 dx \to 0$$
$$(N\to\infty).$$

Система ортогональных с каким-либо весом $\rho(x)$ функций, обладающая указанным свойством, называется *полной*.

Для доказательства сформулированного утверждения предположим сначала, что $f(x)$ — *непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям* $f(0)=f(l)=0$. Введем обозначения:

$$f_N(x)=f(x)-\sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x), \quad \delta_N^2=\int_0^l \rho(x) f_N^2(x)\,dx,$$
$$\varphi_N(x)=\frac{f_N(x)}{\delta_N}.$$

Нам надо доказать, что $\delta_N^2\to 0$ при $N\to\infty$. Так как

$$\int_0^l \rho\,\varphi_N^2(x)\,dx=1$$

и так как, кроме того,

$$\int_0^l \rho\,\varphi_N(x)\,X_n(x)\,dx=0 \quad (n=1,\ldots,N),$$

то $\varphi_N(x)$ является одной из допустимых функций вариационной задачи, рассмотренной в п. 3 этого параграфа *). Значение минимума $D(X)$ для этой задачи равно λ_{N+1}, следовательно,

$$D(\varphi_N)\geqslant\lambda_{N+1}.$$

Вычислим теперь $D(\varphi_N)$. Пользуясь обозначениями п. 3,

*) Ср. примечание на стр. 172—173.

найдем

$$D(\varphi_N)=\int_0^l (p\varphi_N'^2+q\varphi_N^2)\,dx=\frac{1}{\delta_N^2}\int_0^l (pf_N'^2+qf_N^2)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\delta_N^2}\int_0^l \Big[p\Big(f'-\sum_{n=1}^N c_nX_n'\Big)^2+q\Big(f-\sum_{n=1}^N c_nX_n\Big)^2\Big]\,dx=$$

$$=\frac{1}{\delta_N^2}\Big[D(f)-2\sum_{n=1}^N c_nD(f,\ X_n)+\sum_{n=1}^N\sum_{m=1}^N c_nc_mD(X_n,X_m)\Big]\geqslant$$

$$\geqslant\lambda_{N+1}. \qquad (32,22)$$

На основании теоремы 3 п. 3 имеем

$$D(f,\ X_n)=\lambda_nc_n,\ D(X_n,\ X_n)=D(X_n)=\lambda_n,$$
$$D(X_m,\ X_n)=0 \text{ при } n\neq m.$$

Подставляя найденные значения функционалов в (32,22), получим

$$\frac{1}{\delta_N^2}\Big[D(f)-\sum_{n=1}^N \lambda_nc_n^2\Big]\geqslant\lambda_{N+1},$$

откуда

$$\delta_N^2\leqslant\frac{D(f)-\sum\limits_{n=1}^N \lambda_nc_n^2}{\lambda_{N+1}}. \qquad (33,22)$$

Согласно (19,22) существует только конечное число отрицательных λ_n. Поэтому числитель правой части (33,22) ограничен при всех N. Так как $\lambda_{N+1}\to\infty$ при $N\to\infty$, то отсюда следует, что $\delta_N^2\to 0$ при $N\to\infty$, т. е. ряд (30,22) сходится в среднем для всякой дифференцируемой функции, обращающейся в нуль в точках $x=0$ и $x=l$.

Чтобы освободиться от ограничений, наложенных на $f(x)$, заметим, что для всякой кусочно непрерывной функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом существует непрерывно дифференцируемая функция $f^*(x)$, обращающаяся в нуль на концах отрезка $[0,\ l]$ и такая, что

$$\int_0^l \rho\,[f(x)-f^*(x)]^2\,dx<\varepsilon_1,$$

где ε_1 — любое заданное положительное число,

Пусть, далее, N выбрано настолько большим, что

$$\int_0^l \rho(x)\left[f^*(x)-\sum_{n=1}^{N} c_n^* X_n(x)\right]^2 dx < \varepsilon_2;$$

c_n^* — коэффициенты Фурье для $f^*(x)$. Тогда

$$\int_0^l \rho(x)\left[f(x)-\sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x)\right]^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^l \rho(x)\left[\left|f(x)-f^*(x)\right|+\left|f^*(x)-\sum_{n=1}^{N} c_n^* X_n(x)\right|\right]^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1+\varepsilon_2+2\int_0^l \rho(x)\left|f(x)-f^*(x)\right|\left|f^*(x)-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{N} c_n^* X_n(x)\right| dx \leqslant \varepsilon_1+\varepsilon_2+2\sqrt{\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2}.$$

При оценке последнего интеграла мы воспользовались неравенством Буняковского.

Таким образом показано, что для всякой интегрируемой с квадратом функции $f(x)$ существуют такое N и такие c_n, что

$$\int_0^l \rho(x)\left[f(x)-\sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x)\right]^2 dx \tag{34,22}$$

как угодно мал. Но известно (см., например, мои «Лекции по теории интегральных уравнений», Гостехиздат, 1951, стр. 66—67), что интеграл вида (34,22) принимает наименьшее значение, когда c_n суть коэффициенты Фурье для функции $f(x)$. Поэтому, если в (34,22) за c_n взять эти коэффициенты, то величина интеграла (34,22) не увеличится.

Пользуясь ортогональностью функций $X_n(x)$, нетрудно подсчитать, что $\delta_N^2=\int_0^l \rho\left[f(x)\right]^2 dx-\sum_{n=1}^{N} c_n^2 \geqslant 0$ (неравенство Бесселя), где c_n — коэффициенты Фурье для функции $f(x)$. Следовательно, условие полноты системы функций может

быть записано в виде следующего равенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int_0^l \rho\,[f(x)]^2\,dx \tag{35,22}$$

(равенство Парсеваля).

10. Докажем теперь следующую основную теорему: *для непрерывно дифференцируемой на отрезке* $[0, l]$ *функции* $f(x)$, *обращающейся в нуль на концах отрезка* $[0, l]$, *ее «ряд Фурье»* (30,22) *сходится к этой функции абсолютно и равномерно.*

Достаточно показать, что этот ряд вообще абсолютно и равномерно сходится. Действительно, так как этот ряд сходится «в среднем» к $f(x)$, то, сходясь равномерно, он не может иметь своим пределом никакую другую функцию.

Пусть n_0 настолько велико, что $\lambda_n > 0$ при $n \geqslant n_0$. Воспользовавшись неравенством Коши, мы можем для $n \geqslant n_0$ написать

$$\sum_{k=n}^{n+s} |c_k X_k| = \sum_{k=n}^{n+s} |c_k \sqrt{\lambda_k}| \cdot \left|\frac{X_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{n+s} c_k^2 \lambda_k} \sqrt{\sum_{k=n}^{n+s} \frac{X_k^2}{\lambda_k}} \leqslant \sqrt{\sum_{k=n_0}^{n+s} c_k^2 \lambda_k} \sqrt{\sum_{k=n}^{n+s} \frac{X_k^2}{\lambda_k}}.$$

Применим теперь для оценки первого множителя неравенство (33,22), а во втором вынесем за знак корня

$$\max_{k,\,x} |X_k(x)| = M.$$

Так как из неравенства (33,22) следует, что

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} c_k^2 \lambda_k \leqslant D(f) + \sum_{k=1}^{n_0} c_k^2 |\lambda_k| \leqslant M_1^2,$$

то

$$\sum_{k=n}^{n+s} |c_k X_k| \leqslant M_1 M \sqrt{\sum_{k=n}^{n+s} \frac{1}{\lambda_k}}.$$

Так как согласно (19,22)

$$\lambda_k \geqslant c_1 k^2 + c_2,$$

то $\frac{1}{\lambda_k} \leqslant \frac{1}{c_1 k^2 + c_2}$, и ряд $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ сходится. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом n и любом положительном s

$$\sum_{k=n}^{n+s} \frac{1}{\lambda_k} < \frac{\varepsilon^2}{M^2 M_1^2}$$

и поэтому $\sum_{k=n}^{n+s} |c_k X_k| < \varepsilon$, т. е. $\sum c_k X_k(x)$ сходится абсолютно и равномерно.

§ 23. Обоснование метода Фурье

1. Рассмотрим уравнение (1,21). Будем предполагать, что коэффициенты этого уравнения — трижды непрерывно дифференцируемые функции в $\overline{U}_T$, $A(t) > a_0 > 0$ и $C(x) < c_0 < 0$, т. е. уравнение (1,21) гиперболическое *).

Будем искать дважды непрерывно дифференцируемое в $\overline{U}_T$ решение уравнения (1,21), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad u_t'(0, x) = \varphi_1(x) \tag{1,23}$$

и граничным условиям

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0. \tag{2,23}$$

Метод Фурье приводит к рассмотрению ряда (12,21) (см. § 21). Функции $X_k(x)$ являются собственными функциями уравнения (1,22). Пусть

$$L(f) \equiv (pf')' - qf.$$

Тогда уравнение (1,22) можно записать так:

$$L(X_k) = -\lambda_k \rho X_k.$$

Теорема. *Если $\varphi_0(x)$ имеет на отрезке $[0, l]$ непрерывную производную третьего порядка и удовлетворяет условиям*

$$\varphi_0 = L(\varphi_0) = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l, \tag{3,23}$$

*) Легко проверить, что все теоремы § 22 и основная теорема § 23 справедливы, если $C(x)$, $A(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы, $D(t)$, $E(x)$ $F_2(x)$ имеют непрерывные производные первого порядка, а $F_1(t)$ непрерывна.