то $\frac{1}{\lambda_k} \leqslant \frac{1}{c_1 k^2 + c_2}$, и ряд $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ сходится. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом n и любом положительном s

$$\sum_{k=n}^{n+s} \frac{1}{\lambda_k} < \frac{\varepsilon^2}{M^2 M_1^2}$$

и поэтому $\sum_{k=n}^{n+s} |c_k X_k| < \varepsilon$, т. е. $\sum c_k X_k(x)$ сходится абсолютно и равномерно.

§ 23. Обоснование метода Фурье

1. Рассмотрим уравнение (1,21). Будем предполагать, что коэффициенты этого уравнения — трижды непрерывно дифференцируемые функции в $\overline{Ц}_T$, $A(t) > a_0 > 0$ и $C(x) < c_0 < 0$, т. е. уравнение (1,21) гиперболическое *).

Будем искать дважды непрерывно дифференцируемое в $\overline{Ц}_T$ решение уравнения (1,21), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0,\ x) = \varphi_0(x),\quad u_t'(0,\ x) = \varphi_1(x) \tag{1,23}$$

и граничным условиям

$$u(t,\ 0) = u(t,\ l) = 0. \tag{2,23}$$

Метод Фурье приводит к рассмотрению ряда (12,21) (см. § 21). Функции $X_k(x)$ являются собственными функциями уравнения (1,22). Пусть

$$L(f) \equiv (pf')' - qf.$$

Тогда уравнение (1,22) можно записать так:

$$L(X_k) = -\lambda_k \rho X_k.$$

Теорема. *Если $\varphi_0(x)$ имеет на отрезке $[0,\ l]$ непрерывную производную третьего порядка и удовлетворяет условиям*

$$\varphi_0 = L(\varphi_0) = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l, \tag{3,23}$$

---

*) Легко проверить, что все теоремы § 22 и основная теорема § 23 справедливы, если $C(x)$, $A(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы, $D(t)$, $E(x)$ $F_2(x)$ имеют непрерывные производные первого порядка, а $F_1(t)$ непрерывна.

а $\varphi_1(x)$ имеет на этом отрезке непрерывную производную второго порядка и удовлетворяет условиям

$$\varphi_1 = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l, \tag{4,23}$$

то функция $u(t, x)$, определяемая рядом (12,21), *имеет непрерывные производные второго порядка и удовлетворяет в $\overline{Ц}_T$ уравнению* (1,21), *начальным условиям* (1,23) *и граничным условиям* (2,23). *При этом возможно почленное дифференцирование ряда* (12,21) *по t и x до двух раз включительно; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно в $\overline{Ц}_T$* *).

Доказательство **). Рассмотрим ряд (12,21), построенный в § 21:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\left[A_k T_k^*(t) + B_k T_k^{**}(t)\right]. \tag{5,23}$$

Здесь $L(X_k) = -\lambda_k \rho X_k$, $\int\limits_0^l \rho X_k^2(x)\,dx = 1$,

$$A_k = \int\limits_0^l \rho\varphi_0 X_k\,dx \quad \text{и} \quad B_k = \int\limits_0^l \rho\varphi_1 X_k\,dx.$$

Функции T_k^* и T_k^{**} являются решениями уравнения (6,21) при $\lambda = \lambda_k$ и удовлетворяют начальным условиям

$$T_k^*(0) = 1, \quad \frac{dT_k^*(0)}{dt} = 0,$$

$$T_k^{**}(0) = 0, \quad \frac{dT_k^{**}(0)}{dt} = 1.$$

---

*) Условия (3,23) и (4,23) являются необходимыми условиями для существования в $\overline{Ц}_T$ дважды непрерывно дифференцируемого решения поставленной задачи. Действительно, из условия (2,23) следует, что $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ равны нулю при $x = 0$ и $x = l$. Пользуясь этим, из уравнения (1,21) получаем, что при $x = 0$ и $x = l$

$$C(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E(x)\frac{\partial u}{\partial x} + F_2(x)\,u = 0,$$

т. е. $L(\varphi_0) = 0$ при $x = 0$ и $x = l$.

**) Это доказательство принадлежит О. А. Олейник и А. И. Барабанову.

Заменой переменных, аналогичной (20,22), мы можем привести уравнение (6,21) к виду

$$w'' + \lambda_k w = R(s)\,w. \tag{6,23}$$

Так как при этом $T(t) = \psi(t)\,w$, где $\psi(t)$ есть некоторая функция, не зависящая от k, то соответствующие функциям $\overset{*}{T}_k$ и $\overset{**}{T}_k$ функции $\overset{*}{w}_k$ и $\overset{**}{w}_k$ удовлетворяют начальным условиям

$$\overset{*}{w}_k(0) = a^*, \quad \overset{*}{w}_k{}'(0) = b^* \quad \text{и} \quad \overset{**}{w}_k(0) = 0, \quad \overset{**}{w}_k{}'(0) = b^{**},$$

где a^*, b^*, b^{**} — некоторые числа, не зависящие от k. Для решений уравнения (6,23) мы можем написать интегральное уравнение вида (25,22). Пользуясь этим интегральным уравнением, мы можем, аналогично тому, как это сделано в § 22, получить оценки для $\overset{*}{w}_k$ и $\overset{**}{w}_k$ и их производных. При этом для функций $T^*(t)$ и $T^{**}(t)$ при достаточно больших k мы получим следующие оценки:

$$\left.\begin{aligned} &|\overset{*}{T}_k| < M, && \left|\frac{d\overset{*}{T}_k}{dt}\right| < M\sqrt{\lambda_k}, && \left|\frac{d^2\overset{*}{T}_k}{dt^2}\right| < M\lambda_k, \\ &|T^{**}| < \frac{M}{\sqrt{\lambda_k}}, && \left|\frac{d\overset{**}{T}_k}{dt}\right| < M, && \left|\frac{d^2\overset{**}{T}_k}{dt^2}\right| < M\sqrt{\lambda_k}, \end{aligned}\right\} \tag{7,23}$$

где $M > 0$ — некоторая постоянная.

Оценим теперь коэффициенты Фурье функции $\varphi_0(x)$:

$$A_k = \int_0^l \rho\varphi_0 X_k\,dx = -\int_0^l \varphi_0 \frac{L(X_k)}{\lambda_k}\,dx =$$

$$= -\int_0^l \frac{1}{\lambda_k} L(\varphi_0)\,X_k\,dx. \tag{8,23}$$

Последнее равенство мы получили, интегрируя два раза по частям и учитывая граничные условия $\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = X_k(0) = X_k(l) = 0$. Из равенства (8,23) получаем

$$\lambda_k A_k = -\int_0^l \rho\,\frac{L(\varphi_0)}{\rho}\,X_k\,dx,$$

т. е. $\lambda_k A_k$ суть коэффициенты Фурье непрерывно дифференцируемой функции $H(x) = -\frac{L(\varphi_0)}{\rho}$, удовлетворяющей условиям $H(0) = H(l) = 0$.

Из теоремы п. 10 § 22 следует равномерная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k A_k| |X_k|$. Из неравенства (33,22) легко получаем сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 A_k^2$.

Оценим теперь $B_k = \int_0^l \rho\varphi_1 X_k\,dx$. Пользуясь снова уравнением (1,22), интегрируя два раза по частям и учитывая граничные условия $\varphi_1(0) = \varphi_1(l) = X_k(0) = X_k(l) = 0$, получим

$$B_k = \int_0^l \rho\varphi_1 X_k\,dx = -\int_0^l \frac{1}{\lambda_k}\rho\frac{L(\varphi_1)}{\rho} X_k\,dx = \frac{\beta_k}{\lambda_k},$$

где β_k — коэффициенты Фурье непрерывной функции $H_1(x) = -\frac{L(\varphi_1)}{\rho}$. В силу равенства (35,22) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 = \int_0^l \rho\left(\frac{L(\varphi_1)}{\rho}\right)^2 dx.$$

Пользуясь оценками (7,23), (29,22) и учитывая (20,22), легко показать, что абсолютная и равномерная сходимость ряда (12,21) и рядов, полученных из него почленным дифференцированием по x и по t до двух раз включительно, следует из сходимости числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(|\lambda_k| |A_k| + |B_k| \sqrt{|\lambda_k|}\right), \tag{9,23}$$

так как при достаточно больших k члены этих рядов по модулю не превосходят членов ряда

$$M_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(|\lambda_k| |A_k| + |B_k| \sqrt{|\lambda_k|}\right),$$

где M_1 — некоторая положительная постоянная. Чтобы доказать сходимость ряда (9,23), заметим, что при достаточно больших n

$$\sum_{k=n}^{n+m}(|\lambda_k||A_k|+|B_k|\sqrt{\lambda_k})=\sum_{k=n}^{n+m}\left(|A_k||\lambda_k|^{3/2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}+\frac{|\beta_k|}{\sqrt{\lambda_k}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\sum_{k=n}^{n+m}A_k^2\lambda_k^3}\sqrt{\sum_{k=n}^{n+m}\frac{1}{\lambda_k}}+\sqrt{\sum_{k=n}^{n+m}\beta_k^2}\sqrt{\sum_{k=n}^{n+m}\frac{1}{\lambda_k}}. \quad (10,23)$$

Здесь мы воспользовались неравенством Коши. Из сходимости рядов $\sum_{k=1}^{\infty}A_k^2\lambda_k^3$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2$ и неравенства (10,23) следует сходимость ряда (9,23). Этим теорема доказана.

2. Покажем теперь, что смешанная задача для гиперболического уравнения вида (1,21) имеет единственное решение. В § 18 мы доказали уже единственность решения смешанной задачи для волнового уравнения.

Интегрируя по частям, легко убедиться, что для любых двух дважды непрерывно дифференцируемых в $\overline{Ц}_T$ функций $u(t, x)$ и $v(t, x)$ при $0<T_1\leqslant T$ имеет место формула

$$\iint\limits_{Ц_{T_1}}\Big\{v\left[A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+C(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+D(t)\frac{\partial u}{\partial t}+E(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+(F_1(t)+F_2(x))u\right]-u\left[\frac{\partial^2(A(t)v)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2(C(x)v)}{\partial x^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial(D(t)v)}{\partial t}-\frac{\partial(E(x)v)}{\partial x}+(F_1(t)+F_2(x))v\right]\Big\}\,dx\,dt=$$
$$=\int_0^l\left[vA(t)\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial(Av)}{\partial t}+Duv\right]_{t=T_1}dx-$$
$$-\int_0^l\left[vA(t)\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial(Av)}{\partial t}+Duv\right]_{t=0}dx+$$
$$+\int_0^{T_1}\left[vC(x)\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial(Cv)}{\partial x}+Euv\right]_{x=l}dt-$$
$$-\int_0^{T_1}\left[vC(x)\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial(Cv)}{\partial x}+Euv\right]_{x=0}dt. \quad (11,23)$$

Пусть $u(t, x)$ удовлетворяет в $\overline{Ц}_T$ уравнению (1,21) и условиям

$$u(0, x) = 0, \quad u_t'(0, x) = 0, \quad u(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = 0. \tag{12,23}$$

Покажем, что при этом $u(t, x) \equiv 0$.

Предположим противное. Пусть $u(t, x)$ отлична от нуля в точке (T_1, x_1). Применим формулу (11,23) к функции $u(t, x)$ и функции $v(t, x)$, которую выберем так, чтобы она удовлетворяла в $\overline{Ц}_{T_1}$ уравнению

$$\frac{\partial^2 (A(t)\,v)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (C(x)\,v)}{\partial x^2} - \frac{\partial (D(t)\,v)}{\partial t} - \frac{\partial (E(x)\,v)}{\partial x} + (F_1(t) + F_2(x))\,v = 0 \tag{13,23}$$

и условиям

$$v(t, 0) = 0, \quad v(t, l) = 0, \quad v(T_1, x) = 0, \quad v_t'(T_1, x) = \alpha(x), \tag{14,23}$$

где $\alpha(x)$ — гладкая неотрицательная функция, отличная от нуля только в малой окрестности точки (T_1, x_1), в которой $u(t, x)$ сохраняет знак. Существование функции $v(t, x)$ следует из предыдущей теоремы, так как уравнение (13,23) имеет вид (1,21).

Легко видеть, что в силу соотношений (1,21), (12,23), (13,23) и (14,23) левая часть равенства (11,23) равна нулю, а правая часть равна

$$\int_0^l -u(T_1, x)\,A(T_1)\,\alpha(x)\,dx \neq 0.$$

Полученное противоречие показывает, что $u \equiv 0$.

З а д а ч а. Докажите непрерывную зависимость решения смешанной задачи для уравнения (1,21) от начальных условий: *решение* $u(t, x)$ *уравнения* (1,21), *удовлетворяющее условиям* (1,23) и (2,23), *будет по модулю сколь угодно малым в* $\overline{Ц}_T$, *если* $|\varphi_0(x)|$, $\left|\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right|$ и $|\varphi_1(x)|$ *достаточно малы для всех* x *на отрезке* $[0, l]$.

Для доказательства этого утверждения нужно воспользоваться оценками (7,23), (29,22), равенством (35,22) для функции $\varphi_1(x)$, неравенством (33,22) для функции $\varphi_0(x)$ и сходимостью ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$.

Замечание. Легко показать, что если $u(t, x)$ удовлетворяет в $\overline{Ц}_T$ уравнению (1,21), начальным условиям (1,23) и граничным условиям (2,23), то интеграл

$$\iint\limits_{Ц_T} \rho u^2(t, x)\,dx\,dt$$

будет сколь угодно малым, если $\int\limits_0^l \rho\varphi_0^2(x)\,dx$ и $\int\limits_0^l \rho\varphi_1^2(x)\,dx$ достаточно малы.

Действительно, воспользовавшись представлением $u(t, x)$ в виде ряда (12,21), получим

$$\iint\limits_{Ц_T} \rho u^2(t, x)\,dx\,dt =$$

$$= \iint\limits_{Ц_T} \rho \left| \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\, A_k T_k^*(t) + \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\, B_k T_k^{**}(t) \right|^2 dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2 \iint\limits_{Ц_T} \rho \left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\, A_k T_k^*(t) \right)^2 dx\,dt +$$

$$+ 2 \iint\limits_{Ц_T} \rho \left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\, B_k T_k^{**}(t) \right)^2 dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant K_1 \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 + K_2 \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 = K_1 \int\limits_0^l \rho\varphi_0^2(x)\,dx + K_2 \int\limits_0^l \rho\varphi_1^2(x)\,dx,$$

где K_1 и K_2 — некоторые положительные постоянные, не зависящие от φ_0 и φ_1. При выводе этих оценок мы воспользовались элементарным неравенством $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$, ортогональностью с весом $\rho(x)$ собственных функций, которые предполагаются нормированными, ограниченностью функций T_k^* и T_k^{**} и равенством Парсеваля (35,22).

3. Если начальные функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ не удовлетворяют условиям, сформулированным в теореме настоящего параграфа, то может не существовать дважды непрерывно дифференцируемое в $\overline{Ц}_T$ решение смешанной задачи для уравнения (1,21). Однако если $\varphi_0(x)$ — непрерывно дифференци-

руемая функция, обращающаяся в нуль при $x=0$ и $x=l$, а $\varphi_1(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[0, l]$, то ряд (12,21) равномерно сходится и определяет в $\overline{Ц_T}$ некоторую непрерывную функцию $u(t, x)$. Функция $u(t, x)$ будет при этом обобщенным решением смешанной задачи для уравнения (1,21), соответствующим начальным условиям (1,23) и граничным условиям (2,23).

Функцию $u(t, x)$ мы называем обобщенным решением уравнения (1,21) с начальными условиями (1,23) и граничными условиями (2,23), если $u(t, x)$ является пределом в $\overline{Ц_T}$ при $n \to \infty$ равномерно сходящейся последовательности $u_n(t, x)$ решений уравнения (1,21) с граничными условиями (2,23) и начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} u_n(0, x) &= \varphi_0^n(x), \\ \frac{\partial u_n(0, x)}{\partial t} &= \varphi_1^n(x), \end{aligned}\right\} \tag{15,23}$$

и при $n \to \infty$

$$\int_0^l \rho\,[\varphi_0(x) - \varphi_0^n(x)]^2\,dx \to 0$$

и

$$\int_0^l \rho\,[\varphi_1(x) - \varphi_1^n(x)]^2\,dx \to 0. \tag{16,23}$$

Покажем, что если $\varphi_0(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль при $x=0$ и $x=l$, а $\varphi_1(x)$ — непрерывная функция на $[0, l]$, то уравнению (1,21) с условиями (1,23) и (2,23) соответствует единственное обобщенное решение. Существование обобщенного решения вытекает из того, что частные суммы ряда (12,21) образуют последовательность $u_n(t, x)$, которая удовлетворяет требуемым условиям, и следовательно, ряд (12,21) является обобщенным решением. Покажем теперь, что обобщенное решение единственно.

Если бы двум различным последовательностям функций $\varphi_0^n(x)$, $\varphi_1^n(x)$ и $\tilde{\varphi}_0^n(x)$, $\tilde{\varphi}_1^n(x)$ соответствовали две различные предельные функции $u(t, x)$ и $\tilde{u}(t, x)$ для последовательностей $u_n(t, x)$ и $\tilde{u}_n(t, x)$, то мы имели бы:

$$\iint\limits_{Ц_T} \rho (u - \tilde{u})^2 \, dx \, dt =$$

$$= \iint\limits_{Ц_T} \rho \left[(u - u_n) + (u_n - \tilde{u}_n) + (\tilde{u}_n - \tilde{u})\right]^2 dx \, dt \leqslant$$

$$\leqslant 3 \iint\limits_{Ц_T} \rho (u - u_n)^2 \, dx \, dt + 3 \iint\limits_{Ц_T} \rho (u_n - \tilde{u}_n)^2 \, dx \, dt +$$

$$+ 3 \iint\limits_{Ц_T} \rho (\tilde{u}_n - \tilde{u})^2 \, dx \, dt. \qquad (17,23)$$

На основании замечания п. 2 настоящего параграфа интеграл

$$\iint\limits_{Ц_T} \rho (u_n - \tilde{u}_n)^2 \, dx \, dt$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, так как

$$\int\limits_0^l \rho (\varphi_0^n - \tilde{\varphi}_0^n)^2 \, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_0^l \rho (\varphi_1^n - \tilde{\varphi}_1^n)^2 \, dx$$

стремятся к нулю при $n \to \infty$. Так как два других интеграла в правой части неравенства (17,23) также стремятся к нулю, то

$$\iint\limits_{Ц_T} \rho (u - \tilde{u})^2 \, dx \, dt = 0.$$

Ввиду того, что $u - \tilde{u}$ и $\rho > 0$ — непрерывные функции, имеем $u(t, x) \equiv \tilde{u}(t, x)$.

Из определения обобщенного решения смешанной задачи для уравнения (1,21) следует, что если при заданных $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ существует дважды непрерывно дифференцируемое в $\overline{Ц}_T$ решение смешанной задачи, то обобщенное решение смешанной задачи совпадает с этим решением.

Иногда обобщенным решением смешанной задачи для уравнения (1,21) с условиями (1,23), (2,23) называют такую функцию $u(t, x)$, для которой

$$\lim_{n \to \infty} \iint\limits_{Ц_T} \rho (u_n - u)^2 \, dx \, dt = 0, \qquad (18,23)$$

где функции $u_n(t, x)$ являются решениями уравнения (1,21) при граничных условиях (2,23) и начальных условиях (15,23), причем выполняются соотношения (16,23).

Укажем другие возможные определения обобщенного решения смешанной задачи, в которых используются интегральные тождества (ср. § 9). Для простоты будем рассматривать уравнение вида

$$P(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)\,u = 0. \qquad (19,23)$$

Обобщенным решением смешанной задачи для уравнения (19,23) при начальных и граничных условиях (1,23), (2,23) называется непрерывно дифференцируемая в $\overline{Ц_T}$ функция $u(t, x)$, удовлетворяющая условиям

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad u(t, 0) = u(t, l) = 0 \qquad (20,23)$$

и интегральному тождеству

$$\iint\limits_{Ц_T}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial t} - p\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \sigma}{\partial x} - qu\sigma\right)dx\,dt + \int_0^l \varphi_1(x)\,\sigma(0, x)\,dx = 0 \qquad (21,23)$$

для любой непрерывно дифференцируемой функции $\sigma(t, x)$, равной нулю при $t = T$, при $x = 0$ и при $x = l$.

Иногда удобно пользоваться следующим определением.

Обобщенным решением смешанной задачи для уравнения (19,23) при условиях (1,23), (2,23) называется непрерывная функция $u(t, x)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\iint\limits_{Ц_T} uP(\sigma)\,dx\,dt + \int_0^l \varphi_0(x)\frac{\partial \sigma}{\partial t}(0, x)\,dx - \int_0^l \varphi_1(x)\,\sigma(0, x)\,dx = 0, \qquad (22,23)$$

где $\sigma(t, x)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, для которой

$$\sigma(t, 0) = \sigma(t, l) = \sigma(T, x) = \frac{\partial \sigma}{\partial t}(T, x) = 0. \qquad (23,23)$$

Очевидно, что обобщенное решение, определяемое тождеством (21,23) при условиях (20,23), является в то же время обобщенным решением в смысле (22,23); обратное, вообще говоря, неверно.

Вводя обобщенные решения, мы можем в той или иной степени расширить класс начальных функций, при которых существует решение смешанной задачи. При этом очень важно, чтобы в новом классе решений сохранялась теорема единственности.

Задача 1. Докажите, что обобщенное решение уравнения (19,23) при условиях (1,23), (2,23), определенное соотношением (18,23) (где $\rho = 1$), существует и единственно, если функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ кусочно непрерывны и интегрируемы с квадратом на отрезке $[0, l]$.

Задача 2. Докажите, что обобщенное решение уравнения (19,23) при условиях (1,23), (2,23), определенное соотношениями (20,23), (21,23), существует и единственно, если функция $\varphi_0(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, l]$, а $\varphi_1(x)$ один раз непрерывно дифференцируема на этом отрезке, причем

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = \varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0 \quad \text{и} \quad q(x) \geqslant 0.$$

Указание. Для доказательства единственности воспользоваться функцией

$$\sigma(t, x) = \int_T^t [u_1(\tau, x) - u_2(\tau, x)]\, d\tau,$$

где u_1 и u_2 — два обобщенных решения одной и той же смешанной задачи.

Задача 3. Докажите, что обобщенное решение уравнения (19,23) при условиях (1,23), (2,23), определенное соотношением (22,23), существует и единственно, если функция $\varphi_0(x)$ непрерывна на отрезке $[0, l]$, обращается в нуль при $x = 0$, $x = l$ и имеет на этом отрезке интегрируемую с квадратом кусочно непрерывную производную, а функция $\varphi_1(x)$ кусочно непрерывна и интегрируема с квадратом на отрезке $[0, l]$.

Указание. Для доказательства единственности воспользоваться результатами п. 4 настоящего параграфа.

4. Метод Фурье для неоднородного гиперболического уравнения. Рассмотрим в $Ц_T$ смешанную задачу для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u + f(t, x) \equiv L(u) + f(t, x), \quad (24,23)$$

т. е. будем искать дважды непрерывно дифференцируемое в $\overline{Ц}_T$ решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad u_t'(0, x) = \varphi_1(x) \quad (25,23)$$

и граничным условиям

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0. \quad (26,23)$$

При этом нам достаточно построить решение, удовлетворяющее условиям (25,23) при $\varphi_0(x) = \varphi_1(x) \equiv 0$, так как искомое решение получим, прибавляя к нему ряд (12,21).

Будем искать решение $u(t, x)$ поставленной задачи в виде ряда Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(t) X_k(x)$ по собственным функциям уравнения $L(X) = -\lambda X$ с граничными условиями $X(0) = X(l) = 0$. Разлагая функцию $f(t, x)$ в ряд Фурье по этим собственным функциям и сравнивая коэффициенты Фурье в правой и левой частях уравнения (24,23), мы получим дифференциальные уравнения для определения коэффициентов Фурье $a_k(t)$ вида

$$a_k''(t) = -\lambda_k a_k(t) + f_k(t), \quad (27,23)$$

где $f_k(t) = \int\limits_0^l f(t, x) X_k(x)\,dx$ и $L(X_k) = -\lambda_k X_k$. Легко проверить, что решением уравнения (27,23), удовлетворяющим условиям $a_k(0) = a_k'(0) = 0$, является функция

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^t f_k(\tau) \sin\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, решение $u(t, x)$ уравнения (24,23), удовлетворяющее условиям (26,23) и условиям

$$u(0, x) = u_t'(0, x) = 0, \quad (28,23)$$

должно выражаться в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t f_k(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k}(t-\tau)\, d\tau \right) X_k(x). \quad (29,23)$$

Если ряд (29,23) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по x и по t до двух раз включительно, сходятся равномерно в $\overline{Ц}_T$, то сумма этого ряда есть дважды непрерывно дифференцируемая в $\overline{Ц}_T$ функция, удовлетворяющая уравнению (24,23) и условиям (26,23) и (28,23). Такая сходимость рядов будет обеспечена, если потребовать, чтобы непрерывная функция $f(t, x)$ имела непрерывную производную второго порядка по x и чтобы при всех t выполнялись условия $f(t, 0) = f(t, l) = 0$. При этом мы предполагаем, что коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ имеют две непрерывные производные. Доказательство этого предложения вполне аналогично доказательству основной теоремы настоящего параграфа. Коэффициенты Фурье $f_k(t)$ функции $f(t, x)$ оцениваются аналогично коэффициентам B_k ряда (12,21).

§ 24. Применение функции Грина к задаче о собственных значениях и к обоснованию метода Фурье

Существование полной системы собственных функций в задаче о собственных значениях и основные свойства этой системы можно доказать, не решая вариационных задач, совершенно иным способом. Это можно сделать сведением краевой задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Это сведение осуществляется с помощью так называемой *функции Грина*, к построению которой мы сейчас переходим.

1. Рассмотрим задачу: найти в интервале $(0, l)$ решение уравнения

$$(pX')' - qX = f(x), \quad (1,24)$$

удовлетворяющее условиям

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (2,24)$$

Наряду с уравнением (1,24) рассмотрим уравнение

$$(pY')' - qY = g_\varepsilon(x, x_0) \quad (3,24)$$