должно выражаться в виде ряда

$$u(t, x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^t f_k(\tau)\sin\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)\,d\tau\right)X_k(x). \qquad (29{,}23)$$

Если ряд (29,23) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по x и по t до двух раз включительно, сходятся равномерно в $\overline{Ц}_T$, то сумма этого ряда есть дважды непрерывно дифференцируемая в $\overline{Ц}_T$ функция, удовлетворяющая уравнению (24,23) и условиям (26,23) и (28,23). Такая сходимость рядов будет обеспечена, если потребовать, чтобы непрерывная функция $f(t, x)$ имела непрерывную производную второго порядка по x и чтобы при всех t выполнялись условия $f(t, 0)=f(t, l)=0$. При этом мы предполагаем, что коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ имеют две непрерывные производные. Доказательство этого предложения вполне аналогично доказательству основной теоремы настоящего параграфа. Коэффициенты Фурье $f_k(t)$ функции $f(t, x)$ оцениваются аналогично коэффициентам B_k ряда (12,21).

§ 24. Применение функции Грина к задаче о собственных значениях и к обоснованию метода Фурье

Существование полной системы собственных функций в задаче о собственных значениях и основные свойства этой системы можно доказать, не решая вариационных задач, совершенно иным способом. Это можно сделать сведением краевой задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Это сведение осуществляется с помощью так называемой *функции Грина*, к построению которой мы сейчас переходим.

1. Рассмотрим задачу: найти в интервале $(0, l)$ решение уравнения

$$(pX')'-qX=f(x), \qquad (1{,}24)$$

удовлетворяющее условиям

$$X(0)=X(l)=0. \qquad (2{,}24)$$

Наряду с уравнением (1,24) рассмотрим уравнение

$$(pY')'-qY=g_\varepsilon(x, x_0) \qquad (3{,}24)$$

с такой же левой частью, как и у уравнения (1,24), и свободным членом

$$g_\varepsilon(x, x_0) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{при } x_0 - \frac{\varepsilon}{2} < x < x_0 + \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0 & \text{при всех остальных } x. \end{cases}$$

Здесь ε и x_0 — некоторые параметры; $\varepsilon > 0$; $0 < x_0 < l$, $0 < \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \min\{x_0, l - x_0\}$. Предположим, что нам известно решение $Y_\varepsilon(x, x_0)$ этого уравнения, удовлетворяющее тем же краевым условиям (2,24) и зависящее от параметров ε и x_0 *).

Умножим уравнение (1,24) на Y_ε, а уравнение (3,24), где вместо Y подставлено Y_ε, на X, вычтем второе из первого и проинтегрируем разность по интервалу $(0, l)$. Получим

$$\int_0^l [(pX')' Y_\varepsilon - (pY_\varepsilon')' X]\, dx =$$
$$= \int_0^l [Y_\varepsilon(x, x_0) f(x) - X(x) g_\varepsilon(x, x_0)]\, dx.$$

Так как функции $X(x)$ и $Y_\varepsilon(x, x_0)$ обращаются в нуль на концах промежутка интегрирования, то левая часть равенства равна нулю, в чем нетрудно убедиться, произведя двукратное интегрирование по частям:

$$\int_0^l (pX')' Y_\varepsilon\, dx = pX' Y_\varepsilon \Big|_0^l - \int_0^l pX' Y_\varepsilon'\, dx =$$
$$= -pY_\varepsilon' X \Big|_0^l + \int_0^l (pY_\varepsilon')' X\, dx = \int_0^l (pY_\varepsilon')' X\, dx.$$

---

*) В уравнении (3,24) правая часть имеет две точки разрыва первого рода: $x = x_0 \pm \frac{\varepsilon}{2}$. Можно доказать, что если $q \geqslant 0$, то существует единственное решение уравнения (3,24), удовлетворяющее краевым условиям (2,24) и непрерывное вместе с первой производной на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая производная имеет разрывы первого рода при $x = x_0 \pm \frac{\varepsilon}{2}$.

Следовательно,

$$\int_0^l Y_\varepsilon(x,\ x_0) f(x)\,dx = \int_0^l g_\varepsilon(x,\ x_0)\,X(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_0+\frac{\varepsilon}{2}} X(x)\,dx \approx X(x_0). \qquad (4{,}24)$$

Если предположить, что при $\varepsilon \longrightarrow 0$ функция $Y_\varepsilon(x,\ x_0)$ стремится равномерно по x к некоторой предельной функции (обозначим ее $G(x,\ x_0)$), то, совершив переход к пределу при $\varepsilon \longrightarrow 0$ в обеих частях равенства (4,24), мы получим

$$X(x_0) = \int_0^l G(x,\ x_0) f(x)\,dx. \qquad (5{,}24)$$

Предельная функция $G(x,\ x_0)$ и является *функцией Грина* для уравнения (1,24).

Эти нестрогие рассуждения не дают пока возможности провести точное доказательство каких бы то ни было фактов. Поэтому мы определим функцию Грина независимо от предыдущих наводящих рассуждений и докажем, во-первых, существование такой функции и, во-вторых, справедливость формулы (5,24).

Раньше чем дать точное определение функции Грина, выясним, какими свойствами должен обладать предел $Y_\varepsilon(x,\ x_0)$, если этот предел существует. Проинтегрируем по x тождество (3,24) после подстановки $Y_\varepsilon(x,\ x_0)$ вместо Y в пределах от $x_0-\delta$ до $x_0+\delta$, где $\delta > \frac{\varepsilon}{2}$. Мы получим

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \{[pY'_\varepsilon(x,\ x_0)]' - qY_\varepsilon(x,\ x_0)\}\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g_\varepsilon(x,\ x_0)\,dx = 1.$$

Первое слагаемое можно проинтегрировать в явной форме, после чего предыдущее равенство примет вид

$$pY'_\varepsilon(x,\ x_0)\Big|_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} - \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} qY_\varepsilon(x,\ x_0)\,dx = 1.$$

Допустив здесь законность формального перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ и фиксированном δ, мы получим равенство

$$p(x_0+\delta)\, G'_x(x_0+\delta,\ x_0) - p(x_0-\delta)\, G'_x(x_0-\delta,\ x_0) - \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} q(x)\, G(x,\ x_0)\, dx = 1,$$

справедливое при любом $\delta > 0$. Перейдя теперь к пределу при $\delta \to 0$ и предполагая, что $p(x)$, $q(x)$ и $G(x,\ x_0)$ — непрерывные функции, мы получим равенство

$$p(x_0)\,[G'_x(x_0+0,\ x_0) - G'_x(x_0-0,\ x_0)] = 1,$$

откуда видно, что при сделанных предположениях производная $G'_x(x,\ x_0)$ функции Грина по x должна при $x = x_0$ претерпевать скачок, равный $\frac{1}{p(x_0)}$.

2. Дадим теперь формальное определение функции Грина для уравнения (1,24) и докажем ее существование.

Функцией Грина для уравнения (1,24) *при краевых условиях* (2,24) *называется функция* $G(x,\ s)$, *определенная в квадрате* $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant s \leqslant l$ *и удовлетворяющая следующим условиям:*

1°. $G(x,\ s)$ *как функция* x *при* $x \neq s$ *непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяет однородному уравнению*

$$[pG'_x(x,\ s)]'_x - qG(x,\ s) = 0. \tag{6,24}$$

2°. $$G(0,\ s) = G(l,\ s) = 0.$$

3°. $G(x,\ s)$ *непрерывна в квадрате* $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant s \leqslant l$, *а* $G'_x(x,\ s)$ *как функция от* x *претерпевает разрыв 1-го рода со скачком* $\frac{1}{p(s)}$ *при* $x = s$, *т. е.*

$$G'_x(s+0,\ s) - G'_x(s-0,\ s) = \frac{1}{p(s)} \qquad (0 < s < l).$$

При доказательстве существования такой функции мы предположим, что $q \geqslant 0$, так что $\lambda = 0$ не является собственным значением уравнения

$$(pX')' - qX + \lambda\rho X = 0$$

при краевых условиях (2,24). (Ср. § 39 моих «Лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений», 1952.)

При этом предположении существование функции Грина доказывается просто ее построением. Действительно, пусть $X_1(x)$ есть какое-то нетривиальное решение уравнения $(pX')' - qX = 0$, удовлетворяющее условию

$$X_1(0) = 0,$$

а $X_2(x)$ — нетривиальное решение того же уравнения, удовлетворяющее условию

$$X_2(l) = 0.$$

В силу сделанного предположения решения $X_1(x)$ и $X_2(x)$ линейно независимы. Если бы это было не так, то они были бы просто пропорциональны и каждое из них обращалось бы в нуль при $x=0$ и $x=l$, не будучи равным нулю тождественно, что невозможно, так как $\lambda = 0$ не есть собственное значение. Положим

$$G(x, s) = \begin{cases} A(s)\,X_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ B(s)\,X_2(x), & s < x \leqslant l. \end{cases} \tag{7,24}$$

Тогда условия 1° и 2° удовлетворяются при любом выборе $A(s)$ и $B(s)$.

Выберем теперь $A(s)$ и $B(s)$ так, чтобы удовлетворялось условие 3°. Из условия непрерывности $G(x, s)$ при $x=s$ имеем

$$A(s)\,X_1(s) = B(s)\,X_2(s),$$

откуда

$$A(s) = c(s)\,X_2(s),$$
$$B(s) = c(s)\,X_1(s).$$

Потребуем, чтобы скачок производной в точке $x=s$ имел заданное значение $\dfrac{1}{p(s)}$:

$$G'_x(s-0, s) = c(s)\,X_2(s)\,X'_1(s),$$
$$G'_x(s+0, s) = c(s)\,X_1(s)\,X'_2(s),$$

откуда получаем

$$c(s) = \frac{1}{p(s)\,[X_1(s)\,X'_2(s) - X'_1(s)\,X_2(s)]}.$$

Знаменатель $p(s)[X_1(s)X_2'(s) - X_2(s)X_1'(s)]$ не зависит от s. Действительно, в квадратной скобке стоит определитель Вронского $\Delta(X_1, X_2)$ линейно независимых решений $X_1(s)$ и $X_2(s)$. По известной формуле

$$\Delta(X_1, X_2) = \Delta_0 e^{-\int\limits_0^x \frac{p'(x)\,dx}{p(x)}} = \frac{\Delta_0 p(0)}{p(x)},$$

откуда следует постоянство $c(s)$.

Функция Грина имеет поэтому вид:

$$\left.\begin{aligned} G(x, s) &= \frac{1}{\Delta_0 p(0)} X_2(s) X_1(x) \qquad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant s, \\ G(x, s) &= \frac{1}{\Delta_0 p(0)} X_1(s) X_2(x) \qquad \text{при } s \leqslant x \leqslant l. \end{aligned}\right\} \tag{8,24}$$

Таким образом, существование функции Грина доказано.

Из формулы (8,24) непосредственно очевидно, что *функция Грина симметрична относительно своих аргументов:*

$$G(x, s) = G(s, x).$$

Докажем теперь формулу (5,24) для решения $X(x)$ уравнения (1,24), удовлетворяющего краевым условиям (2,24). Покажем сначала, что функция

$$X(x) = \int\limits_0^l G(x, s) f(s)\,ds \tag{9,24}$$

удовлетворяет уравнению (1,24). В силу симметрии функции Грина функция, определяемая формулой (9,24), совпадает с (5,24). Чтобы вычислить $X'(x)$, представим (9,24) в виде

$$X(x) = \int\limits_0^x G(x, s) f(s)\,ds + \int\limits_x^l G(x, s) f(s)\,ds. \tag{10,24}$$

Дифференцируя это соотношение по x, получим

$$X'(x) = \int\limits_0^x G_x'(x, s) f(s)\,ds + \int\limits_x^l G_x'(x, s) f(s)\,ds + \\ + G(x, x-0) f(x) - G(x, x+0) f(x).$$

В силу непрерывности функции Грина имеем

$$X'(x) = \int_0^x G'_x(x, s) f(s)\, ds + \int_x^l G'_x(x, s) f(s)\, ds. \quad (11,24)$$

Дифференцируя (11,24) по x, получим выражение для $X''(x)$ в виде

$$X''(x) = \int_0^x G''_{xx}(x, s) f(s)\, ds + \int_x^l G''_{xx}(x, s) f(s)\, ds +$$

$$+ G'_x(x, x-0) f(x) - G'_x(x, x+0) f(x).$$

Так как $G'_x(x+0, x) - G'_x(x-0, x) = \frac{1}{p(x)}$, то $G'_x(x, x-0) - G'_x(x, x+0) = \frac{1}{p(x)}$. Поэтому

$$X''(x) = \int_0^l G''_{xx}(x, s) f(s)\, ds + \frac{f(x)}{p(x)}. \quad (12,24)$$

Подставляя в уравнение (1,24) выражения для X, X', X'', получим

$$(pX')' - qX = \int_0^l [(p(x)\, G'_x)'_x - qG] f(s)\, ds + f(x) = f(x).$$

Из формы правой части равенства (5,24) видно, что функция $X(x)$, определенная равенством (5,24), обращается в нуль при $x=0$ и $x=l$.

Таким образом, формула (5,24) дает решение уравнения (1,24), удовлетворяющее условиям (2,24). В силу предположения $q \geqslant 0$ такое решение уравнения (1,24) единственно.

3. Покажем, как с помощью функции Грина для уравнения (1,24) задача о собственных значениях, рассмотренная в предыдущих параграфах, сводится к интегральному уравнению. Для этого запишем основное уравнение (1,22) в виде

$$(pX')' - qX = -\lambda\rho X \quad (13,24)$$

и, полагая $f(x) = -\lambda\rho X$, применим к нему формулу (5,24).

Мы получим равенство

$$X(s)+\lambda\int_0^l G(x,\ s)\,\rho(x)\,X(x)\,dx=0, \qquad (14,24)$$

представляющее собой однородное уравнение Фредгольма второго рода с симметризуемым ядром и параметром λ.

Ядро уравнения (14,24) может быть симметризовано умножением равенства (14,24) на $\sqrt{\rho(s)}$. Тогда это уравнение превратится в уравнение с неизвестной функцией $\sqrt{\rho(s)}\,X(s)$ и симметричным ядром $G(x,\ s)\sqrt{\rho(x)\,\rho(s)}$. В силу формулы (5,24) уравнение (13,24) вместе с краевыми условиями $X(0)=X(l)=0$ и уравнение (14,24) эквивалентны в том смысле, что каждое решение (13,24), обращающееся в нуль при $x=0$ и $x=l$, является решением уравнения (14,24) при том же λ, и обратно.

С другой стороны, для уравнений вида (14,24) справедливы доказанные в § 22 теоремы о существовании собственных значений и собственных функций, об ортогональности системы собственных функций и теорема о разложимости (ср., например, мои «Лекции по теории интегральных уравнений», Гостехиздат, 1951, §§ 11—14). Отсюда прямо следуют теоремы о существовании и ортогональности собственных функций и теорема о разложимости, доказанные в § 22. Правда, для доказательства разложимости функции $f(x)$ приходится при этом требовать непрерывность ее второй производной, чтобы можно было представить ее в виде (5,24) и применить теорему Гильберта — Шмидта.

Функцию Грина, сводящую решение дифференциального уравнения к интегральному, можно определить и для других типов краевых условий, а также для уравнений со многими независимыми переменными. Однако ее эффективное выражение удается обычно получить только для весьма частных видов уравнений и краевых условий.

4. С помощью функции Грина можно дать обоснование метода Фурье решения смешанной задачи для уравнения (1,21) при условиях (1,23), (2,23), не опираясь на результаты § 22.

Для простоты рассмотрим уравнение вида (19,23), где $p>0$, $q\geqslant 0$, и докажем для этого уравнения теорему, формулированную в п. 1 § 23. Ряд (12,21) для этого уравнения имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}t\right). \tag{15,24}$$

Здесь λ_k — собственные значения, а $X_k(x)$ — собственные функции уравнения

$$L(X) \equiv (pX')' - qX = -\lambda X \tag{16,24}$$

с граничными условиями (2,24). Существование собственных значений и собственных функций следует из того, что уравнение (16,24) с условиями (2,24) эквивалентно интегральному уравнению с симметричным ядром

$$X(x) + \lambda\int_0^l G(x, s)X(s)\,ds = 0, \tag{17,24}$$

где $G(x, s)$ — функция Грина для задачи (16,24), (2,24).

Так как начальные функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ удовлетворяют условиям теоремы из п. 1 § 23, то для коэффициентов A_k, B_k в (15,24) выполняются соотношения (ср. § 23):

$$A_k = \int_0^l \varphi_0 X_k\,dx = -\frac{1}{\lambda_k}\int_0^l L(\varphi_0)X_k\,dx; \tag{18,24}$$

$$B_k = \int_0^l \varphi_1 X_k\,dx = -\frac{1}{\lambda_k}\int_0^l L(\varphi_1)X_k\,dx. \tag{19,24}$$

Для доказательства равномерной сходимости ряда (15,24) и рядов, полученных его почленным дифференцированием по x и t до двух раз включительно, достаточно доказать равномерную сходимость на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ следующих рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |X_k(x)|\,(\lambda_k|A_k| + \sqrt{\lambda_k}\,|B_k|), \tag{20,24}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |X_k'(x)|\left(|A_k| + \frac{|B_k|}{\sqrt{\lambda_k}}\right), \tag{21,24}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |X_k''(x)|\left(|A_k| + \frac{|B_k|}{\sqrt{\lambda_k}}\right). \tag{22,24}$$

Из уравнения (16,24) имеем

$$X_k'' = \frac{-p'}{p} X_k' + \frac{q-\lambda_k}{p} X_k;$$

следовательно, равномерная сходимость ряда (22,24) будет вытекать из равномерной сходимости рядов (20,24) и (21,24).

Пусть, как и прежде,

$$D(f, g) = \int_0^l (pf'g' + qfg)\,dx, \qquad D(f) = \int_0^l (pf'^2 + qf^2)\,dx;$$

очевидно, $D(f) \geqslant 0$ для любой функции f. Умножая обе части уравнения (16,24) на X_k и интегрируя от 0 до l, получаем с помощью интегрирования по частям

$$\lambda_k \int_0^l X_k^2\,dx = D(X_k);$$

так как $X_k'(x) \not\equiv 0$, то отсюда следует, что $\lambda_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Лемма. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, l]$, обращается в нуль при $x = 0$, $x = l$ и имеет на этом отрезке кусочно непрерывную производную, интегрируемую с квадратом.

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2 \leqslant D(f), \tag{23,24}$$

где $c_k = \int_0^l f X_k\,dx \qquad (k = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Интегрируя по частям, находим

$$D(f, X_k) = -\int_0^l f[(pX_k')' - qX_k]\,dx = \lambda_k c_k;$$

$$D(X_i, X_k) = \lambda_k \int_0^l X_i X_k\,dx = \lambda_k \delta_{ik}.$$

Пользуясь этим, получаем

$$0 \leqslant D\left(f - \sum_{k=1}^{N} c_k X_k\right) = D(f) + D\left(\sum_{k=1}^{N} c_k X_k\right) - \\ - 2D\left(f, \sum_{k=1}^{N} c_k X_k\right) = D(f) - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k^2,$$

откуда вытекает (23,24).

По предположению, функция $L(\varphi_0)$ удовлетворяет условиям только что доказанной леммы; поэтому для $L(\varphi_0)$ справедливо неравенство (23,24). Используя (18,24), находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 A_k^2 \leqslant D(L(\varphi_0)). \qquad (24,24)$$

Функция $L(\varphi_1)$ непрерывна на отрезке $[0, l]$. Принимая во внимание соотношение (19,24), по неравенству Бесселя получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 B_k^2 \leqslant \int_0^l [L(\varphi_1)]^2 dx. \qquad (25,24)$$

Из уравнения (17,24) имеем

$$\frac{X_k(x)}{\lambda_k} = -\int_0^l G(x, s) X_k(s)\, ds; \qquad (26,24)$$

следовательно, $\frac{X_k(x)}{\lambda_k}$ при фиксированном x является k-м коэффициентом Фурье функции $-G(x, s)$, удовлетворяющей на отрезке $0 \leqslant s \leqslant l$ условиям леммы. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^2(x)}{\lambda_k} \leqslant D(G) \leqslant M_1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \qquad (27,24)$$

Дифференцируя (26,24), получаем:

$$\frac{X_k'(x)}{\lambda_k} = -\int_0^l G_x X_k(s)\, ds;$$

в силу неравенства Бесселя отсюда вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k'^2(x)}{\lambda_k^2} \leqslant \int_0^l G_x'^2\, ds \leqslant M_2 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \qquad (28,24)$$

Докажем теперь, что ряд (20,24) равномерно сходится на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$. Применяя неравенство Коши и пользуясь оценкой (27,24), находим

$$\sum_{k=n}^{n+m} |X_k(x)|(\lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k}|B_k|) =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+m} \frac{|X_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} (\lambda_k^{\frac{3}{2}} |A_k| + \lambda_k |B_k|) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \frac{X_k^2(x)}{\lambda_k}} \left(\sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^3 A_k^2} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^2 B_k^2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{M_1} \left(\sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^3 A_k^2} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^2 B_k^2} \right);$$

отсюда следует равномерная сходимость ряда (20,24), так как числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 A_k^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 B_k^2$ сходятся в силу (24,24) и (25,24).

Докажем равномерную сходимость ряда (21,24). С помощью неравенства (28,24) получаем

$$\sum_{k=n}^{n+m} |X_k'(x)| \left(|A_k| + \frac{|B_k|}{\sqrt{\lambda_k}} \right) =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+m} \frac{|X_k'(x)|}{\lambda_k} (\lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k} |B_k|) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{M_2} \left(\sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^2 A_k^2} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k B_k^2} \right). \qquad (29,24)$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 A_k^2$ сходится в силу неравенства Бесселя для функции $L(\varphi_0)$; ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k B_k^2$ сходится вследствие леммы, примененной к функции φ_1. Поэтому из (29,24) вытекает равномерная сходимость ряда (21,24).

Замечание 1. Применяя такие же рассуждения, можно дать обоснование метода Фурье решения смешанной задачи для общего уравнения (1,21), если использовать оценки вида (7,23) для функций $T_k^*(t)$, $T_k^{**}(t)$ и их производных.

Замечание 2. Результаты настоящего пункта позволяют другим путем получить основную теорему п. 10 § 22. Действительно, для функции, удовлетворяющей условиям леммы настоящего пункта, в силу неравенств (23,24) и (27,24) получаем

$$\sum_{k=n}^{n+m} |c_k| |X_k(x)| = \sum_{k=n}^{n+m} \sqrt{\lambda_k} |c_k| \frac{|X_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{D(G)} \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k c_k^2} < \varepsilon$$

при $n > N(\varepsilon)$, т. е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x)$ на отрезке $[0, l]$ сходится абсолютно и равномерно.

§ 25. Изучение колебаний мембраны

1. В § 1 мы рассмотрели в качестве примера уравнение колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{1,25}$$

Пусть в положении равновесия мембрана совпадает с некоторой ограниченной областью G плоскости (x, y) с кусочно гладкой границей Γ. Тогда функция $u(t, x, y)$, определяющая эти колебания, должна удовлетворять уравнению (1,25) и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} &u(0, x, y) = \varphi_0(x, y) \text{ (начальное отклонение)},\\ &u_t(0, x, y) = \varphi_1(x, y) \text{ (начальная скорость)}, \end{aligned}\right\} \tag{2,25}$$

когда точка $(x, y) \in G$. А на границе Γ области G функция $u(t, x, y)$ должна удовлетворять каким-нибудь граничным условиям рассмотренного в § 1 типа.