функции $L(\varphi_0)$; ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k B_k^2$ сходится вследствие леммы, примененной к функции φ_1. Поэтому из (29,24) вытекает равномерная сходимость ряда (21,24).

Замечание 1. Применяя такие же рассуждения, можно дать обоснование метода Фурье решения смешанной задачи для общего уравнения (1,21), если использовать оценки вида (7,23) для функций $T_k^*(t)$, $T_k^{**}(t)$ и их производных.

Замечание 2. Результаты настоящего пункта позволяют другим путем получить основную теорему п. 10 § 22. Действительно, для функции, удовлетворяющей условиям леммы настоящего пункта, в силу неравенств (23,24) и (27,24) получаем

$$\sum_{k=n}^{n+m} |c_k| |X_k(x)| = \sum_{k=n}^{n+m} \sqrt{\lambda_k} |c_k| \frac{|X_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{D(G)} \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k c_k^2} < \varepsilon$$

при $n > N(\varepsilon)$, т. е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x)$ на отрезке $[0, l]$ сходится абсолютно и равномерно.

§ 25. Изучение колебаний мембраны

1. В § 1 мы рассмотрели в качестве примера уравнение колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{1,25}$$

Пусть в положении равновесия мембрана совпадает с некоторой ограниченной областью G плоскости (x, y) с кусочно гладкой границей Γ. Тогда функция $u(t, x, y)$, определяющая эти колебания, должна удовлетворять уравнению (1,25) и начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(0, x, y) &= \varphi_0(x, y) \text{ (начальное отклонение)}, \\ u_t(0, x, y) &= \varphi_1(x, y) \text{ (начальная скорость)}, \end{aligned} \right\} \tag{2,25}$$

когда точка $(x, y) \in G$. А на границе Γ области G функция $u(t, x, y)$ должна удовлетворять каким-нибудь граничным условиям рассмотренного в § 1 типа.

Мы рассмотрим простейший случай — мембрану, жестко закрепленную на краю, т. е. граничное условие

$$u(t,\ x,\ y)=0,\ \text{когда}\ (x,\ y)\in\Gamma. \tag{3,25}$$

Решая задачу опять методом разделения переменных, положим

$$u(t,\ x,\ y)=T(t)\,v(x,\ y).$$

Аналогично одномерному случаю, получим следующие уравнения для функций $T(t)$ и $v(x,\ y)$:

$$T''+\lambda T=0, \tag{4,25}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\lambda v=0. \tag{5,25}$$

Для уравнения (5,25) при граничном условии (3,25) существует бесконечная последовательность собственных значений. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны между собой. В отличие от случая одного независимого переменного некоторым собственным значениям может соответствовать не одна, а несколько линейно независимых собственных функций. Такие собственные значения называются кратными. Всегда можно выбрать среди собственных функций, соответствующих данному собственному значению, такую конечную систему линейно независимых и ортогональных между собой собственных функций, что всякая собственная функция, принадлежащая этому собственному значению, выражается их линейной комбинацией.

Совокупность выбранных таким образом собственных функций, соответствующих всем собственным значениям, образует полную ортогональную систему функций

$$v_1(x,\ y),\quad v_2(x,\ y),\ \ldots,\ v_n(x,\ y),\ \ldots$$

Разложим функции $\varphi_0(x,\ y)$ и $\varphi_1(x,\ y)$ в ряды по функциям $v_n(x,\ y)$:

$$\varphi_0(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n v_n(x,\ y),\quad \varphi_1(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n v_n(x,\ y). \tag{6,25}$$

Выберем два линейно независимых решения $T^*(t)$ и $T^{**}(t)$ уравнения (4,25) так, чтобы удовлетворялись условия

$$T^*(0)=1;\ T^{*\prime}(0)=0;\ T^{**}(0)=0;\ T^{**\prime}(0)=1.$$

Ряд

$$u(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, y)\left[A_n T_n^*(t) + B_n T_n^{**}(t)\right] \tag{7,25}$$

представляет решение нашей задачи в том случае, если этот ряд и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по t, x и y до двух раз включительно, сходятся равномерно.

Мы остановимся сейчас на двух частных случаях, когда собственные функции уравнения (5,25), в свою очередь, могут быть найдены методом разделения переменных. Аналогично можно поступать и в случае большего числа независимых переменных. Эти случаи могут быть исследованы до конца сведением к одномерной задаче о собственных значениях с помощью следующей леммы.

Лемма. *Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ — полная система ортогональных и нормированных с весом $\rho_1(x)$ функций на отрезке $[a, b]$. Пусть, далее, для каждого $n\,(n = 1, 2, \ldots)$ имеется полная система ортогональных и нормированных с весом $\rho_2(y)$ функций на отрезке $[c, d]$*

$$\psi_{n1}(y), \psi_{n2}(y), \ldots, \psi_{nm}(y), \ldots \tag{8,25}$$

Функции $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$ предполагаются непрерывными и неотрицательными. В таком случае функции

$$X_{nm}(x, y) = \varphi_n(x)\,\psi_{nm}(y)$$

образуют полную систему ортогональных и нормированных функций с весом $\rho(x, y) = \rho_1(x)\,\rho_2(y)$ в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, т. е. имеют место равенства

$$\int_c^d \int_a^b \rho(x, y)\,X_{nm}(x, y)\,X_{n'm'}(x, y)\,dx\,dy = \\ = \begin{cases} 1 \text{ при } n = n', & m = m', \\ 0 \text{ при } n \neq n' \text{ или } m \neq m', \end{cases} \tag{9,25}$$

и если

$$c_{nm} = \int_a^d \int_a^b \rho(x, y)\,f(x, y)\,X_{nm}(x, y)\,dx\,dy,$$

то для любой непрерывной в рассматриваемом прямоугольнике функции $f(x, y)$ *справедливо равенство Парсеваля*

$$\int_c^d\int_a^b \rho(x, y)[f(x, y)]^2\,dx\,dy = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{nm}^2. \qquad (10,25)$$

Доказательство. Справедливость формул (9,25) очевидна. Для доказательства (10,25) положим

$$\int_a^b \rho_1(x) f(x, y)\varphi_n(x)\,dx = g_n(y).$$

Тогда очевидно, что

$$\int_c^d \rho_2(y) g_n(y)\psi_{nm}(y)\,dy = c_{nm},$$

$$\int_a^b \rho_1[f(x, y)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2(y)$$

и что

$$\int_c^d \rho_2(y) g_n^2(y)\,dy = \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}^2,$$

так как системы $\psi_{nm}(y)$ полны при любом n и квадрат функции $g_n(y)$ интегрируем.

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n^2(y)$ состоит из положительных членов и сходится к непрерывной функции в каждой точке отрезка $[c, d]$, то по теореме Дини он сходится равномерно на этом отрезке и поэтому

$$\int_c^d\int_a^b \rho(x, y)[f(x, y)]^2\,dx\,dy = \int_c^d \rho_2(y)\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2(y)\,dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^d \rho_2(y) g_n^2(y)\,dy = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}^2,$$

что и требовалось доказать.

2. Рассмотрим теперь первый частный случай — *колебания прямоугольной мембраны.*

Пусть область G представляет собой прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Разделяя переменные в уравнении (5,25), положим

$$v(x, y) = X(x)\, Y(y).$$

После подстановки этой функции уравнение (5,25) примет вид

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0.$$

Разделим на XY и перенесем $\frac{X''}{X}$ в другую часть равенства. Получившееся равенство

$$\frac{Y''}{Y} + \lambda = -\frac{X''}{X}$$

эквивалентно двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$X'' + \alpha X = 0, \quad Y'' + \beta Y = 0,$$

где α — постоянная, а $\beta = \lambda - \alpha$. Соответственно граничному условию (3,25) первое уравнение должно решаться при условиях

$$X(0) = X(a) = 0,$$

а второе при аналогичных условиях

$$Y(0) = Y(b) = 0.$$

Чтобы удовлетворить этим условиям, мы должны считать $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ (см. § 20). Повторяя рассуждения § 20, находим последовательности собственных значений и нормированных собственных функций первого и второго уравнений

$$\alpha_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{n\pi}{a} x;$$

$$\beta_m = \frac{m^2\pi^2}{b^2}, \quad Y_m(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\frac{m\pi}{b} y;$$

$$(n, \ m = 1, 2, \ldots).$$

Согласно лемме система функций

$$v_{nm}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{n\pi}{a} x \sin\frac{m\pi}{b} y \qquad (11,25)$$

есть полная система ортогональных и нормированных решений уравнения (5,25) для прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$

при краевом условии (3,25) (здесь $Y_{nm}(y) = Y_m(y)$ для любого n). Каждой функции $v_{nm}(x, y)$ соответствует собственное значение

$$\lambda_{nm} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right).$$

Очевидно, что если числа a и b соизмеримы, мы можем получать одно и то же λ при различном выборе n и m, т. е. при различных собственных функциях. Таким образом, мы имеем здесь пример кратных собственных значений.

Вопрос о разложении начальных данных в ряд по функциям (11,25) есть хорошо изученный вопрос о разложении функции в двойной ряд Фурье по синусам. Если начальные данные после нечетного продолжения по x и по y на прямоугольник $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ и периодического продолжения на всю плоскость представляют собой четырежды непрерывно дифференцируемые функции, то коэффициенты разложений (6,25) достаточно быстро стремятся к нулю для того, чтобы ряд (7,25) допускал двукратное дифференцирование. Таким образом, в этом случае метод Фурье для решения данной задачи является полностью обоснованным. Мы видим, что произвольное колебание мембраны так же, как и колебание струны, может быть представлено как наложение ряда простых, так называемых «*собственных*», колебаний, соответствующих собственным значениям λ_{nm}.

Представляют интерес «*узловые линии*» таких колебаний, т. е. линии, вдоль которых обращается в нуль собственная функция, соответствующая данному собственному значению. Рассмотрим эти линии в случае прямоугольной мембраны. Если данное собственное значение не является кратным, т. е. если ему соответствует одна собственная функция

$$\frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y,$$

то узловые линии будут просто отрезками прямых, параллельных сторонам прямоугольника. Если же собственное значение кратно, то различным комбинациям принадлежащих ему собственных функций соответствуют различные узловые линии, и форма их может быть весьма разнообразной. На приводимом ниже рис. 11 изображены узловые линии квадратной мембраны со стороной единичной длины для значений $\lambda = 5\pi^2$,

$10\pi^2$, $13\pi^2$, $17\pi^2$. Под чертежами узловых линий указаны соответствующие собственные функции.

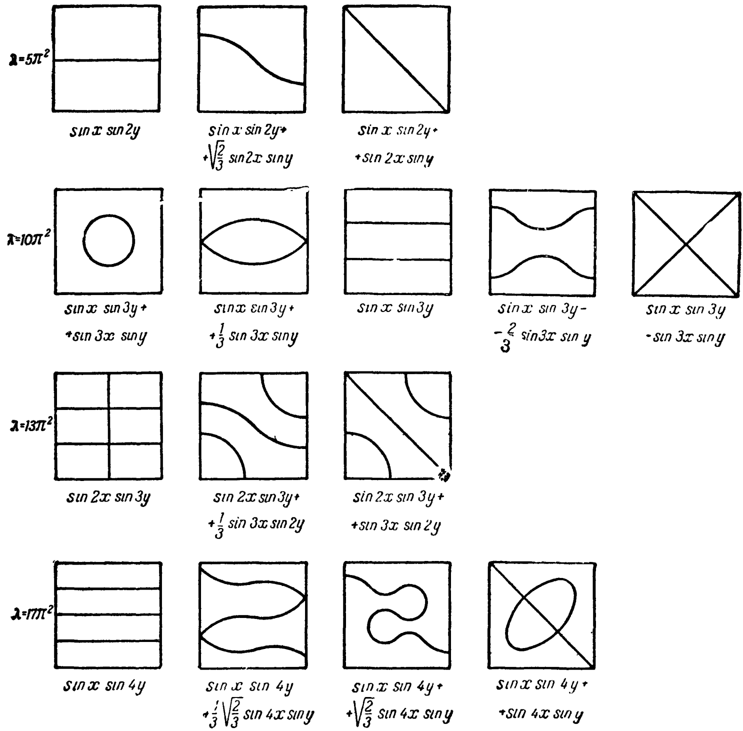

Рис. 11.

3. В качестве второго примера рассмотрим круглую мембрану. Для ее исследования естественно записать уравнение (5,25) в полярных координатах.

Положив $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}+\lambda v=0. \qquad (12,25)$$

Если центр круга D, совпадающего с положением равновесия мембраны, поместить в начале координат, а радиус этого круга для простоты положить равным единице, то граничное условие (3,25) запишется в виде

$$v(1,\ \varphi)=0.$$

Применяя метод разделения переменных, положим

$$v(\rho,\ \varphi)=R(\rho)\,\Phi(\varphi),$$

откуда, произведя подстановку и разделив переменные, получим обыкновенные дифференциальные уравнения для $R(\rho)$ и $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi''(\varphi)+\alpha\Phi(\varphi)=0, \tag{13,25}$$

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(\lambda\rho^2-\alpha)R=0. \tag{14,25}$$

Для решений уравнения (13,25) мы по физическому смыслу задачи получаем условие периодичности; нас интересуют только решения, имеющие период 2π. Такие решения существуют при

$$\alpha=0,\ 1^2,\ 2^2,\ \dots,\ n^2,\ \dots$$

Для этих значений α

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi.$$

Мы можем выбрать полную систему ортогональных и нормированных на окружности функций $\Phi_n(\varphi)$, например, так:

$$\Phi_0^*=\frac{1}{\sqrt{2\pi}};\quad \Phi_n^*(\varphi)=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos n\varphi;\quad \Phi_n^{**}(\varphi)=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\sin n\varphi.$$

Вернемся к уравнению (14,25). После подстановки значения $\alpha=n^2$ и замены независимого переменного

$$\rho_1=\rho\sqrt{\lambda}$$

мы получаем уравнение Бесселя n-го порядка

$$\rho_1^2R''(\rho_1)+\rho_1R'(\rho_1)+(\rho_1^2-n^2)R(\rho_1)=0;$$

его единственным (с точностью до постоянного множителя) решением, ограниченным при $\rho_1\to 0$ (т. е. при $\rho\to 0$), будет функция Бесселя n-го порядка первого рода $J_n(\rho_1)$ *).

---

*) См., например, В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, гл. VI, § 2, п. 2, стр. 250, Физматгиз, 1959.

Известно, что при любом n функция $J_n(x)$ имеет бесчисленное множество положительных корней $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots$ $\ldots, \mu_m^{(n)}, \ldots$, так что $J_n(\mu_m^{(n)}) = 0$.

Известно, кроме того, что при любом фиксированном n функции $J_n(\mu_m^{(n)}x)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ ортогональны между собой с весом x на интервале $(0,1)$ и образуют полную систему ортогональных функций на этом интервале:

$$\int_0^1 xJ_n(\mu_m^{(n)}x)\, J_n(\mu_{m_1}^{(n)}x)\, dx = 0 \text{ при } m \neq m_1.$$

Функции

$$\varphi_{nm}(x) = \frac{J_n(\mu_m^{(n)}x)}{\sqrt{\int_0^1 x\,[J_n(\mu_m^{(n)}x)]^2\, dx}}$$

при любом n образуют полную систему ортогональных и нормированных функций. Не приводя доказательства этих фактов *), заметим, что они являются обобщением доказанных в § 22 свойств собственных функций на уравнения с более общими коэффициентами, чем предполагалось в этом параграфе. Действительно, уравнение (14,25) может быть записано в виде

$$(\rho R')' - \frac{\alpha}{\rho} R + \lambda \rho R = 0,$$

и мы видим, что первый и последний коэффициенты обращаются в нуль на одном конце отрезка $[0,1]$, а $\frac{\alpha}{\rho}$ обращается на этом конце в бесконечность. В соответствии с этим, как можно показать, достаточно в качестве краевого условия задачи о собственных значениях для уравнения (14,25) при $\rho = 0$ брать условие ограниченности решения, чтобы решение определилось с точностью до постоянного множителя, если при $\rho = 1$ задать какое-нибудь условие типа (2,22).

---

*) См., например, Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ 1935; А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1953, стр. 566—619.

Потребуем, чтобы при $\rho = 1$

$$J_n(\sqrt{\lambda}\rho) = 0,$$

т. е. чтобы

$$J_n(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Мы видим, что если $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots, \mu_m^{(n)}, \ldots$ есть последовательность нулей функции $J_n(x)$, то собственными значениями λ нашей задачи будут

$$\lambda_{nm} = [\mu_m^{(n)}]^2,$$

а нормированными собственными функциями уравнения (14,25) будут функции

$$\psi_{nm}(\rho) = J_n(\mu_m^{(n)}\rho) \frac{1}{\sqrt{\int\limits_0^1 \rho\, [J_n(\mu_m^{(n)}\rho)]^2\, d\rho}}.$$

Применяя лемму п. 1, мы можем получить полную систему собственных функций

$$\psi_{nm}(\rho)\,\Phi_n^*(\varphi),\quad \psi_{nm}(\rho)\,\Phi_n^{**}(\varphi)$$

уравнения (12,25) и найти решение нашей задачи, разложив функции $\varphi_0(\rho, \varphi)$ и $\varphi_1(\rho, \varphi)$ в ряды вида

$$\varphi_0(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [c_{nm}^*\Phi_n^*(\varphi) + c_{nm}^{**}\Phi_n^{**}(\varphi)]\,\psi_{nm}(\rho),$$

$$\varphi_1(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [d_{nm}^*\Phi_n^*(\varphi) + d_{nm}^{**}\Phi_n^{**}(\varphi)]\,\psi_{nm}(\rho).$$

Умножив члены первого ряда на соответствующие $T^*(t)$, а члены второго ряда на соответствующие $T^{**}(t)$ и сложив получившиеся ряды, мы получим ряд (7,25), представляющий решение данной задачи. Равномерная сходимость и возможность почленного дифференцирования получившегося ряда будут, как обычно, иметь место при достаточной гладкости функций $\varphi_0(\rho, \varphi)$ и $\varphi_1(\rho, \varphi)$, если они удовлетворяют тем же граничным условиям, каким должно удовлетворять искомое решение уравнения (1,25), и еще некоторым дополнительным условиям на границе круга.