§ 26. Дополнительные сведения о собственных функциях и о разрешимости смешанной задачи для гиперболических уравнений

1. Все сказанное до сих пор относительно задачи о собственных значениях для уравнения (1,22) естественно переносится на аналогичную задачу для уравнения

$$(p_1 u'_x)'_x + (p_2 u'_y)'_y - qu + \lambda \rho u = 0 \tag{1,26}$$

и уравнения

$$(p_1 u'_x)'_x + (p_2 u'_y)'_y + (p_3 u'_z)'_z - qu + \lambda \rho u = 0 \tag{2,26}$$

в предположении, что функции p_i, их производные и ρ непрерывны, а p_i и ρ превосходят некоторые положительные постоянные.

Будем искать решения уравнения (1,26) в некоторой конечной области G с кусочно гладкой границей L, не равные тождественно нулю и удовлетворяющие на границе условию

$$u = 0 \tag{3,26}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0. \tag{4,26}$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по «направлению конормали», которое в каждой точке границы определяется вектором $(p_1 \cos(n, x),\ p_2 \cos(n, y))$, где $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ являются соответственно косинусами углов между направлением внешней нормали и осями Ox, Oy, а σ есть некоторая неотрицательная функция, определенная на границе G. Аналогично предыдущему определим собственные функции и собственные значения этой задачи. Построим функционалы

$$H(u) = \iint\limits_G \rho u^2\, dx\, dy,$$

$$D(u) = \iint\limits_G (p_1 u_x^2 + p_2 u_y^2 + qu^2)\, dx\, dy$$

в случае краевого условия (3,26) и

$$D^*(u) = D(u) + \int\limits_L \sigma u^2\,dl =$$
$$= \iint\limits_G (p_1 u_x^2 + p_2 u_y^2 + q u^2)\,dx\,dy + \int\limits_L \sigma u^2\,dl$$

в случае краевого условия (4,26). Тогда мы легко сможем перенести на этот случай все теоремы о свойствах собственных функций и собственных значений, доказанные в § 22.

Для этого случая имеют место, в частности, теорема Куранта о максимально-минимальном свойстве собственных функций и вытекающая из нее зависимость собственных значений от коэффициентов уравнения, от области G и от краевых условий. Как легко видеть, n-е собственное значение не убывает при возрастании функций $\sigma(l)$, p_1, p_2, q, $\frac{1}{\rho}$.

К задачам этого типа мы приходим, например, при изучении колебаний мембраны. Тогда свойства, аналогичные описанным в п. п. 5в и 6 § 22, приобретают интересную физическую интерпретацию, указывая характер изменения частоты собственных колебаний мембраны при закреплении ее в некоторых частях области G (п. 5в) или при наличии у нее трещин (п. 6). Последнее свойство находится в соответствии с хорошо известным физическим фактом, что битые вещи издают более низкие тоны, чем целые.

Для уравнений (1,26) и (2,26) точно так же остается справедливой теорема о полноте системы собственных функций и о разложимости в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям всякой функции f, которая на границе удовлетворяет тем же краевым условиям, что и рассматриваемые собственные функции. Однако при этом в теореме о разложимости приходится требовать от f большей гладкости, чем в случае одного независимого переменного. При двух и трех независимых переменных достаточно требовать, чтобы функция f имела непрерывные производные до второго порядка включительно в замкнутой области и граница области была достаточно гладкой. Метод доказательства теоремы о разложимости, изложенный раньше для случая одного независимого переменного, в этих случаях неприменим. Здесь приходится пользоваться интегральными уравнениями.

Для общих эллиптических уравнений второго порядка собственные функции были исследованы М. В. Келдышем *). Свойства собственных функций и собственных значений для таких уравнений (теорема о разложимости, структура спектра) значительно сложнее, чем в рассмотренных выше частных случаях (1,22), (1,26) и (2,26).

2. Говоря о поведении собственных функций уравнения (1,22), мы не касались вопроса о частоте перемен знака («нулей») функции $X_n(x)$, соответствующей собственному значению λ_n, на интервале $(0, l)$. Об этом говорят так называемые осцилляционные теоремы Штурма.

Оказывается, что, во-первых, n-я собственная функции для уравнения (1,22) при краевых условиях (5,22) имеет ровно $(n-1)$ нулей внутри отрезка $[0, l]$ и, во-вторых, нули функции $X_{n+1}(x)$ «перемежаются» с нулями функции $X_n(x)$, т. е. в каждом интервале между двумя корнями $X_{n+1}(x)$ лежит один корень функции $X_n(x)$ (ср. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, § 39, Гостехиздат, 1952).

Относительно узловых линий n-й собственной функции уравнения (1,26) при краевых условиях (3,26) доказано, что они делят основную область G не более чем на n частичных областей, и известно, что этих областей, в отличие от случая одной независимой переменной, может быть меньше, чем n. Никаких теорем, аналогичных теореме Штурма о перемежающихся нулях у последовательных собственных функций обыкновенного уравнения, для случая многих независимых переменных не доказано. Тем более неизвестно асимптотическое поведение собственных функций для произвольных областей.

3. Многие задачи физики, как классической, так и новой, приводят к определению собственных функций и собственных значений уравнения

$$u'' + \lambda u = R(x)\,u \qquad (5,26)$$ **)

в интервале $-\infty < x < \infty$ или в конечном интервале $(0, l)$,

---

*) М. В. Келдыш, ДАН СССР, 77, № 1 (1951), 11—14.

**) Напомним, что к этому виду заменой переменных можно привести любое уравнение вида (1,22) с достаточно гладкими коэффициентами.

но в предположении, что функция $R(x)$ на одном или обоих концах интервала обращается в бесконечность.

В различных случаях теория разложений по собственным функциям обобщается по-разному. Укажем два наиболее важных случая.

а) *Интервал конечен:* $0 < x < l$; $R(0) = \infty$. Во многих задачах вместо граничного условия в точке $x = 0$ требуют, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^l u^2(x, \lambda)\, dx < \infty, \tag{6,26}$$

где $u(x, \lambda)$ есть решение уравнения (5,26). При этом оказывается, что в некоторых случаях не все решения уравнения удовлетворяют условию (6,26). В этих случаях условие (6,26) вместе с граничным условием в точке $x = l$ однозначно (с точностью до постоянного множителя) определяют собственные числа и собственные функции, причем спектр оказывается точечным и сохраняется осцилляционная теорема Штурма.

В других случаях оказывается, что все решения уравнения (5,26) удовлетворяют условию (6,26). Тогда условия (6,26) недостаточно для определения спектра уравнения (5,26); необходимо ввести дополнительное граничное условие в точке 0, на характере которого мы здесь не будем останавливаться. При этом дополнительном условии вместе с условием при $x = l$ спектр оказывается точечным. В обоих случаях справедлива теорема о разложении для широкого класса функций.

Обе возможности хорошо иллюстрируются уравнением Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(s^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0. \tag{7,26}$$

Его решения суть

$$J_\nu(sx), \quad Y_\nu(sx) = \frac{J_\nu(sx)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(sx)}{\sin\nu\pi}\ ^{*)}.$$

В результате подстановки $y_1 = \sqrt{x}\, y$ уравнение (7,26) пере-

*) При ν целом функция $Y_\nu(sx)$ определяется как предел при стремлении ν к данному целому значению.

ходит в уравнение

$$y_1'' + \left(s^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) y_1 = 0 \qquad (7,26)_1$$

вида (5,26).

Если $\nu \geqslant 1$, то условию (6,26) удовлетворяют лишь функции $\sqrt{x}\, J_\nu(sx)$. При $0 \leqslant \nu < 1$ все решения уравнения (7,26) удовлетворяют этому условию.

В первом случае, чтобы получить собственные функции и собственные значения, следует на функцию $\sqrt{x}\, J_\nu(sx)$ наложить граничное условие только в точке l, например условие

$$\frac{d}{dx}\{\sqrt{x}\, J_\nu(sx)\}_{x=l} - H(\sqrt{x}\, J_\nu(sx))_{x=l} = 0. \qquad (8,26)$$

Это условие вместе с условием (6,26) определяет собственные функции и собственные значения.

Во втором случае, когда $0 \leqslant \nu < 1$, к условию (8,26) надо добавить некоторое условие в точке $x = 0$.

б) *Интервал* $(0, \infty)$, $R(x)$ — *непрерывная функция.* В этом случае физические задачи обычно приводят к отысканию решений $u(x)$ уравнения (5,26), удовлетворяющих какому-либо краевому условию при $x = 0$ и ограниченных при $x \to \infty$. При этом, если $R(x)$ — абсолютно интегрируемая функция в интервале $(0, \infty)$, мы получаем так называемый *сплошной спектр,* т. е. непрерывную последовательность собственных значений и семейство собственных функций $u(x, \lambda)$, непрерывно изменяющихся при изменении λ. На этот случай обобщается равенство Парсеваля, т. е. определение полноты системы собственных функций. Имеет место следующая теорема.

Пусть $f(x)$ — *функция с интегрируемым квадратом в интервале* $(0, \infty)$. *Тогда*

$$\int_0^\infty f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)\,d\rho(\lambda) \quad \textit{(равенство Парсеваля)},$$

где $F(\lambda)$ (обобщенное преобразование Фурье функции $f(x)$) есть предел сходящейся в среднем при $n \to \infty$ последовательности функций

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f(x)\,u(x, \lambda)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[F(\lambda)-F_n(\lambda)]^2 d\rho(\lambda)=0.$$

Здесь $\rho(\lambda)$ есть некоторая неубывающая функция.

Представление функции $f(x)$ в виде интеграла от собственных функций по параметру λ, т. е. формула вида

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x, \lambda)\,dg(\lambda)$$

при некоторой функции $g(\lambda)$ (аналог обычного интеграла Фурье для уравнения $u''+\lambda u=0$), имеет место при гораздо более сильных предположениях, которые мы здесь приводить не будем.

Более детально можно ознакомиться с этим кругом вопросов по книге Б. М. Левитана «Разложение по собственным функциям», Гостехиздат, 1950.

4. Точно так же, как в случае одной независимой переменной, для случая большего числа измерений иногда приходится рассматривать задачу о собственных значениях для уравнения с коэффициентами, обращающимися в бесконечность. Сколько-нибудь общей теории таких задач не существует, но в отдельных случаях удается решить задачу до конца и получить разложение по собственным функциям соответствующей задачи. Приведем в качестве примера уравнение колебаний газа в пространстве

$$\Delta u=u_{tt},$$

при решении которого методом Фурье возникает задача об определении собственных функций уравнения

$$\Delta u+\lambda u=0$$

для некоторой области G. Если область G есть шар радиуса 1 с центром в начале координат, то, приведя уравнение к сферическим координатам и определяя решения, имеющие вид $u(\rho, \theta, \varphi)=f(\rho)\,Y(\theta, \varphi)$, мы получим для функции $Y(\theta, \varphi)$ уравнение

$$\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)\right]+kY=0,$$

коэффициенты которого обращаются в бесконечность в полюсах сферы $\theta=0$, $\theta=\pi$. Краевыми условиями для этого уравнения служат условия непрерывности и однозначности решения на сфере $\rho=1$. При этих условиях мы получаем, как и в случае непрерывных коэффициентов, бесконечную последовательность собственных значений $k_n=n(n+1)$. Каждому собственному значению k_n соответствует $2n+1$ линейно независимых собственных функций $Y_n^m(\theta, \varphi)$ (сферические функции n-го порядка, $m=1, 2, \ldots, 2n+1$), причем последовательность собственных функций является полной на поверхности сферы и всякая непрерывная и достаточно гладкая функция на сфере может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по сферическим функциям.

5. Вариационные методы для приближенного нахождения собственных функций и собственных значений*). Как было показано в § 22, задача нахождения первого собственного значения и первой собственной функции уравнения (1,22) при краевых условиях

$$X(0)=X(l)=0$$

эквивалентна задаче нахождения минимума функционала

$$D(X)=\int_0^l (pX'^2+qX^2)\,dx \tag{9,26}$$

при условии

$$H(X)=\int_0^l \rho X^2 dx=1 \tag{10,26}$$

в классе функций $X(x)$, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, l]$ и обращающихся в нуль на концах этого отрезка. Для приближенного решения этой задачи воспользуемся методом Ритца, который состоит в следующем. Рассмотрим произвольную систему из бесконечного числа линейно независимых функций $\varphi_n(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, непрерывно дифференцируемых и удовлетворяющих краевым условиям

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0.$$

---

*) См. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1952, гл. IV, стр. 258—373.

Будем искать приближенное решение поставленной экстремальной задачи в виде линейной комбинации конечного числа функций

$$X_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x) \tag{11,26}$$

с неопределенными коэффициентами a_n.

Подставив (11,26) в (9,26) и (10,26) и произведя интегрирование, мы придем к задаче нахождения минимума квадратичной формы

$$g(a_1, \ldots, a_N) = \sum_{n, m=1}^{N} a_m a_n \int_0^l [p\varphi_n'(x)\varphi_m'(x) + q\varphi_n(x)\varphi_m(x)]\,dx = \sum_{n, m=1}^{N} A_{mn} a_m a_n$$

при условии

$$h(a_1, \ldots, a_N) = \sum_{n, m=1}^{N} a_m a_n \int_0^l \rho\varphi_n\varphi_m dx = \sum_{n, m=1}^{N} B_{mn} a_m a_n = 1.$$

Это — задача дифференциального исчисления, которая практически легко решается, так как производные g и h по a_k суть линейные функции от $a_1, \ldots, a_N$, и поэтому система уравнений

$$\frac{\partial(g - \lambda h)}{\partial a_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{12,26}$$

есть линейная однородная система уравнений относительно a_k. Определитель этой системы есть многочлен N-й степени относительно λ. Он обращается в нуль при $\lambda = \lambda_1^{(N)}, \ldots, \lambda_N^{(N)}$, $\lambda_1^{(N)} \leqslant \lambda_2^{(N)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_N^{(N)}$. Все λ действительны. Для каждого $\lambda_i^{(N)}$ существует нетривиальное решение системы (12,26) $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_N^{(i)}$. Если $\lambda_i^{(N)}$ является k-кратным корнем определителя, то система (12,26) при $\lambda = \lambda_i^{(N)}$ имеет k линейно независимых решений $(a_1^{(i)}, \ldots, a_N^{(i)})$.

Пусть система функций $\varphi_n(x)$ такова, что для всякой непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0, l]$ функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям $f(0) = f(l) = 0$, и любого $\varepsilon > 0$

можно найти такую линейную комбинацию $\sum_{k=1}^{m} c_k\varphi_k$ функций φ_n с постоянными коэффициентами, что на отрезке $[0, l]$

$$|f(x)-\sum_{k=1}^{m} c_k\varphi_k(x)|<\varepsilon \quad \text{и} \quad |f'(x)-\sum_{k=1}^{m} c_k\varphi_k'(x)|<\varepsilon.$$

Тогда при каждом фиксированном значении i и $N\to\infty$

$$\lambda_i^{(N)}\to\lambda_i,$$

где λ_i — i-е собственное значение данной задачи. Числа $\lambda_i^{(N)}$ при i, не превосходящем некоторого фиксированного числа M, и достаточно большом N, являются приближенными значениями первых M собственных значений уравнения (1,22) при краевых условиях

$$X(0)=X(l)=0.$$

Из последовательности функций $X_i^{(N)}$ можно выбрать подпоследовательность $X_i^{(N')}$ такую, что равномерно на отрезке $[0, l]$

$$X_i^{(N')}(x)\to X_i(x) \quad \text{при } N'\to\infty,$$

где $X_i(x)$ — i-я собственная функция данной задачи.

Быстрота сходимости $X_i^{(N')}(x)$ к $X_i(x)$ существенно зависит от выбора функций $\varphi_n(x)$ и степени гладкости коэффициентов $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ *).

Подробное изложение метода Ритца, метода Галеркина и других приближенных методов содержится в книге С. Г. Михлина «Вариационные методы в математической физике», Гостехиздат, 1957.

6. Обоснование метода Фурье для решения смешанной задачи в случае многих независимых переменных. Методом Фурье можно решать смешанную задачу для гиперболического уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]-a(x_1, \ldots, x_n)u+ \\ +f(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (13,26)$$

*) См., например, Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Известия Ак. наук СССР, серия физ.-матем., 1930, стр. 43—71, 105—114.

в прямом цилиндре $Ц_T$ произвольной высоты T, одним из оснований которого служит область G гиперплоскости $t=0$, при начальных условиях

$$u(0, x)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x)=\psi(x) \tag{14,26}$$

и граничном условии

$$u=0 \text{ на границе } G. \tag{15,26}$$

Решение этой задачи, как и в случае двух независимых переменных, формально представляется рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t+\frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^t f_k(\tau)\sin\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)\,d\tau\right]v_k(x_1, \ldots, x_n), \tag{16,26}$$

где $v_k(x_1, \ldots, x_n)$ — собственные функции уравнения

$$\sum_{i, j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)-av+\lambda v=0$$

с граничным условием (15,26), а

$$f_k(t)=\int\underset{G}{\ldots}\int f(t, x_1, \ldots, x_n)\,v_k(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n.$$

С. Л. Соболев впервые ввел в рассмотрение обобщенные решения смешанной задачи. Он получил так называемые энергетические неравенства для решений уравнения (13,26) в цилиндре $Ц_T$. Эти неравенства позволяют доказать сходимость в среднем ряда (16,26), а также рядов, полученных почленным дифференцированием (16,26) по x_i и t, и установить, что сумма ряда (16,26) является обобщенным решением смешанной задачи (13,26) — (15,26).

Работы С. Л. Соболева по гиперболическим уравнениям, в которых систематически применялись доказанные им теоремы о вложении функциональных пространств, использовались понятия обобщенного решения и обобщенной производной, оказали большое влияние на дальнейшие исследования смешанной задачи.

Для неоднородного волнового уравнения с многими независимыми переменными Х. Л. Смолицкий, используя выведенные им оценки для собственных функций и их производных, доказал существование обычного решения смешанной задачи*).

О. А. Ладыженская доказала, что при определенных условиях на коэффициенты уравнения (13,26), начальные функции и границу области G ряд (16,26) и ряды, полученные его двукратным почленным дифференцированием по x_i и t, равномерно сходятся в $\overline{Ц}_T$ **). В. А. Ильин дал другое обоснование метода Фурье решения смешанной задачи (13,26) — (15,26); при этом предположения относительно границы области G были сведены к минимальным. ***) М. А. Красносельским предложена общая схема обоснования метода Фурье для широкого класса задач, основанная на использовании теории дробных степеней операторов в функциональных пространствах ****).

7. Решение смешанной задачи для общего линейного гиперболического уравнения второго порядка. Смешанная задача для гиперболических уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} a_{0i}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+ b_0\frac{\partial u}{\partial t}+cu+f, \qquad (17,26)$$

где a_{ij}, a_{0i}, b_i, b_0, c и f — достаточно гладкие функции от t, x_1, ..., x_n, впервые была решена Кржижанским и Шаудером *****) с помощью аналитической аппроксимации коэффициентов уравнения, начальных и граничных условий. При этом потребовалось либо налагать сильные ограничения на

---

*) Х. Л. Смолицкий, ДАН СССР 73, №3 (1950), стр. 463—466.

**) О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, 1953.

***) В. А. Ильин, Успехи матем. наук, **15**:**2** (1960), 97—154.

****) См. М. А. Красносельский и Е. И. Пустыльник, ДАН СССР 122, № 6 (1958), 978—981.

*****) Krzyzanski, Schauder, Studia Mathematica, t. VI (1936), 162—189.

гладкость начальных данных, либо предположить высоту цилиндра $Ц_T$ достаточно малой.

Методом конечных разностей О. А. Ладыженская *) доказала разрешимость смешанной задачи для уравнения (17,26) в цилиндре $Ц_T$ произвольной высоты T при некоторых естественных предположениях относительно коэффициентов и начальных данных. Изучен также вопрос о существовании, единственности и дифференциальных свойствах обобщенного решения смешанной задачи.

Смешанную задачу для уравнения (17,26) в цилиндре $Ц_T$ можно свести к задаче Коши для операторного уравнения в некотором функциональном пространстве. Это пространство обладает, в частности, тем свойством, что все принадлежащие ему гладкие функции удовлетворяют граничным условиям, заданным на боковой поверхности цилиндра $Ц_T$. Такой подход оказался возможным также для уравнений и систем более общего вида. Это позволило методами функционального анализа доказать теоремы о существовании и единственности обобщенного решения смешанных задач для таких уравнений и систем **).

Весьма общие результаты о разрешимости смешанных задач для различных классов уравнений получены с помощью аппарата теории обобщенных функций ***).

---

*) См. сноску **) на стр. 235.

) См., например, М. И. Вишик и О. А. Ладыженская, Успехи матем. наук, **11:6 (1956), 41—97.

***) Lions, Acta Mathematica 94, № 1—2 (1955), 13—153.