ГЛАВА III
ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 27. Введение

В качестве простейшего представителя эллиптических уравнений мы всюду в этой главе будем рассматривать уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0. \qquad (1,27)$$

Основные свойства решений этого уравнения не зависят от n. Для простоты записи мы всюду будем рассматривать случай, когда $n=2$, не оговаривая каждый раз, если аналогичные рассмотрения применимы и для $n>2$. В конце главы будет дан обзор результатов, известных для эллиптических уравнений более общего вида.

Эллиптическими уравнениями описываются стационарные, установившиеся состояния. В § 1 мы видели, например, что уравнению Лапласа удовлетворяет установившаяся в однородной пластинке или в однородном теле температура u. Там же мы видели, что этим уравнением описывается форма мембраны, натянутой на некоторую пространственную кривую и находящейся в равновесии. Потенциалы поля тяготения и стационарного электрического поля также удовлетворяют уравнению Лапласа в точках, в которых отсутствуют массы, соответственно электрические заряды.

Одним из самых основных свойств решений эллиптических уравнений является их гладкость. Это вполне соответствует тому, что эллиптическими уравнениями описываются установившиеся состояния: физически ясно, что все первоначальные неровности к моменту установления стационарного состояния должны сгладиться. В этой главе будет доказано, что все непрерывные решения уравнения Лапласа аналитичны по всем независимым переменным. Было бы неверным, однако, утверждение, что все решения уравнения Лапласа аналитичны. Например, уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2,27}$$

всюду удовлетворяет функция u, определенная соотношениями

$$u(x, y) = \operatorname{Reel}\{e^{-\frac{1}{z^4}}\} \quad \text{при } z \neq 0, \text{ где } z = x + iy,$$
$$u(0, 0) = 0.$$

Однако легко видеть, что эта функция не только не аналитична в окрестности начала координат, но она даже разрывна в начале координат. Таким образом, чтобы утверждать, что u аналитична, надо предположить некоторый первоначальный запас гладкости у функции u. *Непрерывные* решения уравнения Лапласа (т. е. непрерывные функции, у которых существуют производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$) называются *гармоническими функциями*.

Типичной краевой задачей для эллиптических уравнений является *первая краевая задача* (*задача Дирихле*), о которой мы упоминали в § 1. *На границе Γ некоторой конечной области G пространства $(x_1, \ldots, x_n)$ задается непрерывная функция f. Требуется найти функцию $u(x_1, \ldots, x_n)$, гармоническую внутри G и принимающую заданные значения f на Γ.* Точный смысл слов «функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ должна принимать заданные на границе значения» таков: функция, совпадающая с $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ внутри G и совпадающая на границе с заданной там функцией f, должна быть непрерывной в $\overline{G} = G + \Gamma$.

Вторая краевая задача (*задача Неймана*) состоит в том, чтобы найти *внутри конечной области G, ограниченной поверхностью Γ с непрерывно вращающейся касательной плоскостью, непрерывную в $G + \Gamma$ гармоническую функцию $u(x_1, \ldots, x_n)$, у которой производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ по направлению внешней нормали в каждой точке границы G равна значению в этой точке заданной функции f.*

В § 1 мы рассмотрели примеры физических задач, которые приводят к первой и второй краевым задачам для уравнения Лапласа.

В дальнейшем мы рассмотрим подробно вопросы существования и единственности решения этих задач для уравнения Лапласа.

Задача. Пусть $u(x_1, \ldots, x_n) = f(r)$, где $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2}$, а функция $f(r)$ определена при $r > 0$ и имеет непрерывную производную второго порядка. Покажите, что если $u(x_1, \ldots, x_n)$ является гармонической при $r > 0$ функцией, то

$$f(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^{n-2}} \quad \text{при } n \neq 2,$$

$$f(r) = C_1 + C_2 \ln\frac{1}{r} \quad \text{при } n = 2.$$

§ 28. Свойство максимума и минимума и его следствия

1. Мы ограничимся рассмотрением гармонических функций $u(x, y)$ от двух независимых переменных. Все утверждения, доказанные в этом параграфе, справедливы для гармонических функций любого числа независимых переменных, и их доказательство может быть проведено аналогично.

Лемма 1. *Пусть в круге радиуса R, включая его границу, задана непрерывная функция $u(x, y)$, гармоническая во всех внутренних точках этого круга. Предположим, что во всех внутренних точках (x, y) этого круга $u(x, y) > u(x_0, y_0)$, где (x_0, y_0) — некоторая точка, лежащая на границе круга. Если в точке (x_0, y_0) существует производная от функции $u(x, y)$ по направлению ν, образующему острый угол с направлением внутренней нормали, то*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0.$$

Доказательство. Так как при параллельном переносе координатных осей гармоническая функция переходит в гармоническую, то мы можем считать, что начало координат находится в центре круга. Рассмотрим функцию

$$v(x, y) = \ln\frac{1}{r} + \frac{r^2}{4R^2} - \ln\frac{1}{R} - \frac{1}{4},$$