В § 1 мы рассмотрели примеры физических задач, которые приводят к первой и второй краевым задачам для уравнения Лапласа.

В дальнейшем мы рассмотрим подробно вопросы существования и единственности решения этих задач для уравнения Лапласа.

Задача. Пусть $u(x_1, \ldots, x_n) = f(r)$, где $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2}$, а функция $f(r)$ определена при $r > 0$ и имеет непрерывную производную второго порядка. Покажите, что если $u(x_1, \ldots, x_n)$ является гармонической при $r > 0$ функцией, то

$$f(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^{n-2}} \quad \text{при } n \neq 2,$$

$$f(r) = C_1 + C_2 \ln \frac{1}{r} \quad \text{при } n = 2.$$

§ 28. Свойство максимума и минимума и его следствия

1. Мы ограничимся рассмотрением гармонических функций $u(x, y)$ от двух независимых переменных. Все утверждения, доказанные в этом параграфе, справедливы для гармонических функций любого числа независимых переменных, и их доказательство может быть проведено аналогично.

Лемма 1. *Пусть в круге радиуса R, включая его границу, задана непрерывная функция $u(x, y)$, гармоническая во всех внутренних точках этого круга. Предположим, что во всех внутренних точках (x, y) этого круга $u(x, y) > u(x_0, y_0)$, где (x_0, y_0) — некоторая точка, лежащая на границе круга. Если в точке (x_0, y_0) существует производная от функции $u(x, y)$ по направлению ν, образующему острый угол с направлением внутренней нормали, то*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0.$$

Доказательство. Так как при параллельном переносе координатных осей гармоническая функция переходит в гармоническую, то мы можем считать, что начало координат находится в центре круга. Рассмотрим функцию

$$v(x, y) = \ln \frac{1}{r} + \frac{r^2}{4R^2} - \ln \frac{1}{R} - \frac{1}{4},$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Так как на границе круга $v=0$ и $\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}+\frac{r}{2R^2}<0$, если $0<r\leqslant R$, то во всех внутренних точках круга, кроме центра, $v>0$. Легко проверить, что $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{1}{R^2}$, если $x^2+y^2\neq 0$.

Обозначим через D множество точек (x, y), для которых $\frac{1}{4}R^2<x^2+y^2<R^2$. Пусть α равно наименьшему значению функции $u(x, y)-u(x_0, y_0)$ на окружности $x^2+y^2=\frac{R^2}{4}$. Из условий леммы следует, что $\alpha>0$.

Рассмотрим в области D функцию

$$w(x, y)=u(x, y)-u(x_0, y_0)-\frac{\alpha}{v\left(\frac{R}{2}, 0\right)}v(x, y).$$

Легко видеть, что $w\geqslant 0$ на границе области D. Функция $w(x, y)$ не может внутри области D принимать наименьшее значение, так как

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\frac{\alpha}{v\left(\frac{R}{2}, 0\right)R^2}<0$$

в D, а в точке минимума необходимо $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\geqslant 0$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\geqslant 0$. Поэтому во всех точках области D должно быть $w\geqslant 0$, т. е.

$$u(x, y)-u(x_0, y_0)\geqslant\frac{\alpha}{v\left(\frac{R}{2}, 0\right)}v(x, y).$$

В точке (x_0, y_0)

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}=\frac{\partial v}{\partial r}\cos(\nu, r),$$

где $\cos(\nu, r)$ означает косинус угла между направлением радиуса-вектора в точке (x_0, y_0) и направлением ν. Очевидно, $\frac{\partial v}{\partial \nu}>0$. Так как функции $u(x, y)-u(x_0, y_0)$ и $v(x, y)$ обращаются в нуль в точке (x_0, y_0) и в области D

$$u(x, y)-u(x_0, y_0)\geqslant\frac{\alpha}{v\left(\frac{R}{2}, 0\right)}v(x, y),$$

то в точке (x_0, y_0)

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \geqslant \frac{a}{v\left(\frac{R}{2}, 0\right)} \frac{\partial v}{\partial \nu} > 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема о максимуме и минимуме. *Гармоническая функция $u(x, y)$, отличная от постоянной, не может в какой-нибудь внутренней точке области G принимать значение, равное верхней или нижней грани значений $u(x, y)$ в G.*

(Если область G конечна и $u(x, y)$ можно так продолжить в $\bar{G}$, чтобы это продолжение, которое мы будем также обозначать через $u(x, y)$, было непрерывно в $\bar{G}$, то, очевидно, верхняя и нижняя грани значений $u(x, y)$ в G совпадают соответственно с ее максимальным и минимальным значениями в $\bar{G}$.)

Доказательство *). Предположим, что гармоническая функция, отличная от постоянной, принимает в области G значение m, равное нижней грани значений $u(x, y)$ в G. Пусть E — множество тех точек G, где $u(x, y) = m$. Так как функция $u(x, y)$ не равна постоянной в G, то найдется область G_1, которая содержится вместе со своей границей внутри G и такая, что G_1 содержит некоторые точки множества E и по крайней мере одну точку, не принадлежащую E. Внутри области G_1 найдется точка P, не принадлежащая E, расстояние от которой до множества E меньше, чем расстояние до границы G, так как существуют точки в G_1, сколь угодно близкие к E и не принадлежащие E, а для всех точек G_1 расстояние до границы G больше некоторого положительного числа **).

Рассмотрим круг K с центром в точке P, радиус которого равен расстоянию от точки P до множества E. Этот круг лежит внутри G и все внутренние точки этого круга не принадлежат E. На границе круга K найдется точка Q, принадлежащая E. Это следует из определения расстояния от точки до множества и из того, что предельные точки множества E,

*) О. А. Олейник, Матем. сборник 30 (72): 3(1952), 696—697.

**) Расстоянием от точки P до множества $\mathfrak{M}$ мы называем нижнюю грань расстояний от P до точек $\mathfrak{M}$.

содержащиеся в G, принадлежат E. В точках множества E должно быть $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

Применяя лемму 1 к функции $u(x, y)$, рассматриваемой в круге K, получим, что производная от $u(x, y)$ в точке Q по любому направлению, не касательному к границе круга в точке Q, если только такая производная существует, отлична от нуля. Это противоречит тому, что $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ в точке Q, так как хотя бы одна из координатных осей не совпадает с касательной к границе круга в точке Q. Полученное противоречие показывает, что гармоническая функция $u(x, y)$, отличная от постоянной, не может принимать внутри G значение, равное m.

Если бы $u(x, y)$ принимала внутри G значение M, равное верхней грани значений $u(x, y)$ в G, то функция $-u(x, y)$ принимала бы значение, равное нижней грани ее значений в G, что невозможно. Теорема доказана.

Следствие. Гармоническая в конечной области G функция, непрерывная в $\bar{G}$, принимает свое наибольшее и наименьшее значения на границе этой области.

2. Из только что доказанной теоремы сразу следует *единственность решения задачи Дирихле*. В самом деле, допустим, что две гармонические функции u_1 и u_2 совпадают на границе некоторой ограниченной области G. Тогда их разность, которая, очевидно, также является гармонической функцией, тождественно равна нулю на границе области и, по доказанному, не может внутри области принимать больших или меньших, чем нуль, значений, т. е.

$$u_1-u_2\equiv 0 \quad \text{и} \quad u_1\equiv u_2.$$

Из теоремы о максимуме и минимуме следует также *непрерывная зависимость решения задачи Дирихле от граничных данных* для произвольной ограниченной области G. Действительно, допустим, что u_1 и u_2 — решения задачи Дирихле для некоторой области G при значениях f_1, соответственно f_2, на границе Γ области G и что на Γ всюду $|f_1-f_2|<\varepsilon$. Тогда граничные значения гармонической функции u_1-u_2, равные, очевидно, f_1-f_2, удовлетворяют неравенствам

$$-\varepsilon<f_1-f_2<\varepsilon.$$

Из теоремы о максимуме и минимуме следует тогда, что всюду в области G

$$-\varepsilon < u_1 - u_2 < \varepsilon,$$

т. е. $|u_1 - u_2| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Отсюда следует полезная для дальнейшего

Лемма 2. *Если последовательность непрерывных в некоторой замкнутой ограниченной области и гармонических внутри этой области функций равномерно сходится на границе области, то она также равномерно сходится во всей рассматриваемой области.*

Для доказательства рассмотрим такую последовательность $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ и обозначим через f_i значения функции u_i на границе Γ области G. По предположению, последовательность f_i равномерно сходится. По критерию Коши для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при $n, m > N$ всюду на Γ $|f_n - f_m| < \varepsilon$. Но тогда, по доказанному, для этих n и m будет $|u_n - u_m| < \varepsilon$ всюду в $\overline{G}$. На основании достаточности критерия Коши мы заключаем отсюда, что последовательность $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ равномерно сходится в замкнутой области.

3. Пользуясь леммой 1 и теоремой о максимуме и минимуме, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть граница Γ области G такова, что каждой точки P границы Γ можно коснуться кругом K_P, принадлежащим области G, т. е. существует круг K_P, который содержит точку P и все внутренние точки которого принадлежат G (так будет, например, в том случае, если кривая, ограничивающая область G, имеет в каждой точке ограниченную кривизну). Если гармоническая функция $u(x, y)$ непрерывна в $G + \Gamma$ и не равна постоянной, то в точке P_1 границы G, где $u(x, y)$ принимает наименьшее (соответственно наибольшее) значение, производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ от функции $u(x, y)$ по направлению внешней нормали отрицательна (соответственно положительна), если только производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ в этой точке существует.*

Доказательство. Возьмем круг K_{P_1}. По предположению, все внутренние точки этого круга принадлежат G. Если $u(x, y)$ не равна постоянной, то по теореме о максимуме и минимуме функция $u(x, y)$ принимает наименьшее значение только в граничных точках G. Поэтому значение $u(x, y)$ во всех внутренних точках K_{P_1} строго меньше значения $u(x, y)$ в точке P_1. Применяя лемму 1 этого параграфа, получим, что $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$ в точке P_1, если только эта производная существует.

В точках Г, где $u(x, y)$ принимает наибольшее значение, функция $-u(x, y)$ принимает наименьшее значение и, по доказанному, $\frac{\partial}{\partial n}(-u) < 0$, т. е. $\frac{\partial u}{\partial n} > 0$.

Теорема 2. *Решения одной и той же второй краевой задачи могут отличаться между собой только постоянными слагаемыми, если граница G удовлетворяет условию, сформулированному в теореме* 1.

Доказательство. Пусть $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ — гармонические функции в G, непрерывные в $G + \Gamma$, и $\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} = f$ на Г. Функция $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$, гармоническая в G, непрерывна в $G + \Gamma$ и $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Если бы $u(x, y)$ отличалась от постоянной, то согласно теореме 1 в точке P_1, где $u(x, y)$ принимает наименьшее значение, производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ была бы отличной от нуля. Следовательно, $u(x, y)$ равна постоянной.

Задача. Третья краевая задача состоит в том, чтобы найти гармоническую функцию $u(x, y)$ в области G, непрерывную в $G + \Gamma$ и такую, что $\frac{\partial u}{\partial n} + au$ в каждой точке границы области G равно значению заданной функции f ($a \geqslant 0$, $a \not\equiv 0$ и $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали). Докажите единственность решения третьей краевой задачи для уравнения Лапласа, предполагая, что граница Г области G удовлетворяет условию, сформулированному в теореме 1.

§ 29. Решение задачи Дирихле для круга

1. Пусть на окружности радиуса 1 задана непрерывная функция $f(s)$. Здесь s означает длину дуги окружности, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки, и предполагается, что $f(0) = f(2\pi)$. Требуется построить гармони-