значение только в граничных точках G. Поэтому значение $u(x, y)$ во всех внутренних точках K_{P_1} строго меньше значения $u(x, y)$ в точке P_1. Применяя лемму 1 этого параграфа, получим, что $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$ в точке P_1, если только эта производная существует.

В точках Г, где $u(x, y)$ принимает наибольшее значение, функция $-u(x, y)$ принимает наименьшее значение и, по доказанному, $\frac{\partial}{\partial n}(-u) < 0$, т. е. $\frac{\partial u}{\partial n} > 0$.

Теорема 2. *Решения одной и той же второй краевой задачи могут отличаться между собой только постоянными слагаемыми, если граница G удовлетворяет условию, сформулированному в теореме* 1.

Доказательство. Пусть $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ — гармонические функции в G, непрерывные в $G + \Gamma$, и $\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} = f$ на Г. Функция $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$, гармоническая в G, непрерывна в $G + \Gamma$ и $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Если бы $u(x, y)$ отличалась от постоянной, то согласно теореме 1 в точке P_1, где $u(x, y)$ принимает наименьшее значение, производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ была бы отличной от нуля. Следовательно, $u(x, y)$ равна постоянной.

Задача. Третья краевая задача состоит в том, чтобы найти гармоническую функцию $u(x, y)$ в области G, непрерывную в $G + \Gamma$ и такую, что $\frac{\partial u}{\partial n} + au$ в каждой точке границы области G равно значению заданной функции f ($a \geqslant 0$, $a \not\equiv 0$ и $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали). Докажите единственность решения третьей краевой задачи для уравнения Лапласа, предполагая, что граница Г области G удовлетворяет условию, сформулированному в теореме 1.

§ 29. Решение задачи Дирихле для круга

1. Пусть на окружности радиуса 1 задана непрерывная функция $f(s)$. Здесь s означает длину дуги окружности, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки, и предполагается, что $f(0) = f(2\pi)$. Требуется построить гармоническую внутри окружности функцию u, принимающую на самой окружности заданные значения $f(s)$.

Поместим начало координат в центр рассматриваемого круга и ось Ox направим в точку $s=0$. Перейдем к полярным координатам, взяв Ox за полярную ось и O — за полюс. Тогда уравнение граничной окружности запишется в полярных координатах: $\rho=1$, и функция $f(s)=f(\varphi)$, где φ — полярный угол точки на окружности.

Применим для решения нашей задачи метод Фурье, предполагая сначала, что $f(s)$ имеет непрерывную производную второго порядка. Позднее мы освободимся от этого ограничения. Уравнение Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0. \qquad (1,29)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде произведения двух функций:

$$u=R(\rho)\cdot\Phi(\varphi). \qquad (2,29)$$

Подставляя такое произведение в уравнение (1,29) и разделяя переменные, получим (аналогично § 20) для функций $R(\rho)$ и $\Phi(\varphi)$ обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\Phi''+\lambda\Phi=0$$

$$\rho^2R''+\rho R'-\lambda R=0. \qquad (3,29)$$

Функция $\Phi(\varphi)$ по смыслу задачи должна иметь период 2π, что может быть только при λ, равном квадрату целого числа n или нулю. Полагая $\lambda=n^2$ и

$$\Phi_n=a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi,$$

из (3,29) получаем для R уравнение

$$\rho^2R''+\rho R'-n^2R=0.$$

Это уравнение имеет линейно независимые решения $R=\rho^n$ и $R=\rho^{-n}$ *), и так как второе решение имеет разрыв в на-

*) Подстановкой $\rho=e^t$ оно приводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

чале координат, то непрерывными внутри единичного круга частными решениями вида (2,29) являются функции

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Кроме того, при $\lambda = 0$ получается решение $u_0(\rho, \varphi) = \text{const}$, которое мы обозначим $\frac{a_0}{2}$. Ряд

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \qquad (4,29)$$

при любых ограниченных a_n и b_n сходится в любой внутренней точке круга, так как при $\rho < 1$ этот ряд можно мажорировать сходящимся рядом вида

$$M(1 + \rho_1 + \rho_1^2 + \ldots + \rho_1^n + \ldots), \qquad (5,29)$$

где $\rho < \rho_1 < 1$.

Чтобы показать, что функция (4,29) является гармонической при $0 \leqslant \rho < 1$, запишем ряд (4,29) с помощью координат x и y:

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Reel}\,[(a_n - ib_n)(x + iy)^n]. \qquad (6,29)$$

Ряд (6,29) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по x и по y любое число раз, сходятся равномерно при $0 \leqslant \rho < \rho_1 < 1$, так как эти ряды мажорируются рядом (5,29) и рядами, полученными из (5,29) почленным дифференцированием по ρ_1. Отсюда следует, что $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, так как каждый член ряда (6,29) является гармонической функцией.

Полагая $\rho = 1$ и $u(1, \varphi) = f(\varphi)$, мы из (4,29) получаем равенство

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

которое будет справедливым при сделанном относительно $f(\varphi)$ предположении, если положить a_0, a_n и b_n равными коэффициентам Фурье для функции $f(\varphi)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi\, d\varphi;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi\, d\varphi. \tag{7,29}$$

Чтобы ряд (4,29) с коэффициентами, определенными по формулам (7,29), давал решение задачи Дирихле, надо доказать еще непрерывность этой функции в замкнутом круге $\rho \leqslant 1$ (см. § 27). Но при $\rho \leqslant 1$ ряд (4,29) можно мажорировать рядом

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|,$$

сходящимся в силу предположения о непрерывности второй производной функции $f(s)$ *).

Таким образом, для дважды непрерывно дифференцируемых граничных функций $f(s)$ задача Дирихле для круга единичного радиуса решается рядом (4,29).

Покажем теперь, что ряд (4,29), где a_n, b_n определяются формулами (7,29), представляет (при $\rho < 1$) решение задачи Дирихле и в том случае, когда $f(s)$ — произвольная непрерывная функция. Для этого построим последовательность дважды непрерывно дифференцируемых функций $f_m(s)$, равномерно сходящуюся к заданной на окружности $\rho = 1$ непрерывной функции $f(s)$. Пусть u_m — решение задачи Дирихле, соответствующее функции $f_m(s)$. По лемме 2 § 28 последовательность u_m равномерно в круге $\rho \leqslant 1$ сходится к непрерывной функции $u(x, y)$. Очевидно, при $\rho = 1$ $u(x, y)$ совпадает с $f(s)$.

Покажем, что при $\rho < 1$ функция $u(x, y)$ представляется рядом (4,29) с коэффициентами (7,29). По доказанному, этот

*) В этом случае, как известно, $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ и $b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

ряд сходится при $\rho < 1$ и является гармонической функцией. Пусть $a_n^{(m)}$, $b_n^{(m)}$ — коэффициенты Фурье функции f_m.

При достаточно большом m для всех n имеем

$$|a_n - a_n^{(m)}| \leqslant \varepsilon, \quad |b_n - b_n^{(m)}| \leqslant \varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число.

Отсюда

$$\left|\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) - u_m\right| =$$

$$= \left|\frac{a_0 - a_0^{(m)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left[(a_n - a_n^{(m)}) \cos n\varphi + (b_n - b_n^{(m)}) \sin n\varphi\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 2\varepsilon \frac{1}{1-\rho}.$$

Таким образом, функция $u(x, y)$ представляется рядом (4,29) и является решением задачи Дирихле, соответствующим граничной функции $f(s)$.

2. Преобразуем ряд (4,29), подставив вместо коэффициентов a_n и b_n их выражения по формулам (7,29). Мы получим при $\rho < 1$

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi)\, d\psi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left\{ \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n\psi\, d\psi \cdot \cos n\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin n\psi\, d\psi \cdot \sin n\varphi \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi)\, d\psi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(\psi) \rho^n \cos n(\psi - \varphi)\, d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\psi - \varphi)\right) d\psi.$$

Положив $\varphi - \psi = \omega$, преобразуем выражение в скобках. Получим

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n\omega = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos n\omega =$$

$$= -1 + 2\,\mathrm{Reel}\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n e^{in\omega} = -1 + 2\,\mathrm{Reel}\,\frac{1}{1-\rho e^{i\omega}} =$$

$$= \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2 - 2\rho\cos\omega}. \quad (8,29)$$

Поэтому при $\rho < 1$

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2 - 2\rho\cos(\psi-\varphi)}\,d\psi. \quad (9,29)$$

Интеграл (9,29) называется *интегралом Пуассона.*

Для круга произвольного радиуса R и произвольной непрерывной функции $f(s)$ мы получим решение задачи Дирихле, заменив в формуле (9,29) ρ через $\frac{\rho}{R}$. В качестве переменной интегрирования вместо ψ можно взять $s = R\psi$. Тогда мы получим интеграл Пуассона для произвольного круга

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} f(s)\,\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2 - 2R\rho\cos(\psi-\varphi)}\,ds. \quad (10,29)$$

Замечание. Формулы, аналогичные (10,29), имеют место для решения задачи Дирихле и для n-мерного шара. При $n = 3$ соответствующая формула имеет вид

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi R}\iint_{\Sigma} f(\theta', \varphi')\,\frac{R^2 - r^2}{(R^2 - 2rR\cos\gamma + r^2)^{3/2}}\,d\sigma,$$

где интегрирование производится по сфере $\sum$ радиуса R, а γ — угол между радиусами-векторами точки (r, θ, φ) и переменной точки (R, θ', φ') на поверхности $\sum$.

Задача 1. Докажите непосредственной проверкой, что интеграл Пуассона (10,29) является гармонической функцией в круге радиуса R.

Задача 2. Покажите, что предельные значения на окружности $\rho = R$ функции, определяемой интегралом Пуассона (10,29), совпадают с $f(s)$.

3. Укажем другой подход к решению задачи Дирихле для круга, основанный на использовании *функции Грина.*

Выведем сначала формулу Грина, справедливую для любых двух функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, имеющих непрерывные производные первого и второго порядков в $D+\Gamma$, где D — некоторая конечная область с кусочно гладкой границей Γ. Применяя формулу Остроградского, находим

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dx\,dy - \iint\limits_D u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) dx\,dy =$$

$$= \int\limits_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial n}\,ds - \iint\limits_D u\,\Delta v\,dx\,dy; \qquad (11,29)$$

здесь $\Delta v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, а $\frac{\partial v}{\partial n}$ означает производную v по направлению внешней нормали к кривой Γ. Аналогично получаем

$$I = \int\limits_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n}\,ds - \iint\limits_D v\,\Delta u\,dx\,dy. \qquad (12,29)$$

Из равенств (11,29) и (12,29) вытекает *формула Грина*

$$\iint\limits_D (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx\,dy = \int\limits_\Gamma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) ds. \qquad (13,29)$$

Пусть функция $u(x, y)$ является гармонической в области D. Исходя из равенства (13,29), мы выведем формулу, выражающую значение u в произвольной точке (x_0, y_0) области D через граничные значения u.

Положим

$$v(x, y;\ x_0, y_0) = \ln\frac{1}{r},$$

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, и применим формулу Грина

(13,29) к функциям u и v в области D_ε, которая ограничена кривой Γ и окружностью Γ_ε с центром в точке (x_0, y_0) и произвольно малым радиусом ε. Получим

$$\int\limits_\Gamma \left[\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right] ds + \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \left[\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon} - u\frac{\partial}{\partial n_\varepsilon}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right] ds_\varepsilon = 0. \qquad (14,29)$$

Направление внешней относительно области D_ε нормали n_ε к Γ_ε совпадает с направлением по радиусу Γ_ε от точки (x, y) к точке (x_0, y_0). Поэтому на Γ_ε

$$\frac{\partial}{\partial n_\varepsilon}\left(\ln\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\varepsilon}. \qquad (15,29)$$

Вследствие непрерывности первых производных функции u получаем

$$\max_{\Gamma_\varepsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon}\right| \leqslant C,$$

где C не зависит от ε. Поэтому

$$\left|\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon} ds_\varepsilon\right| = \left|\ln\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon} ds_\varepsilon\right| \leqslant C\cdot 2\pi\varepsilon\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon} \longrightarrow 0$$

при $\varepsilon \longrightarrow 0$.

В силу (15,29) имеем

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial n_\varepsilon}\left(\ln\frac{1}{r}\right) ds_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u\, ds_\varepsilon = 2\pi u(x_\varepsilon, y_\varepsilon),$$

где $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ — некоторая точка на Γ_ε. Следовательно, при $\varepsilon \longrightarrow 0$ последний интеграл в левой части (14,29) стремится к $-2\pi\cdot u(x_0, y_0)$.

Переходя к пределу при $\varepsilon \longrightarrow 0$ в равенстве (14,29), получаем

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \left[\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right] ds. \qquad (16,29)$$

Предположим, что нам удалось построить гармоническую в области D функцию $v_1(x, y; x_0, y_0)$, которая имеет в D ограниченные производные первого и второго порядков и совпадает на Γ с функцией $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$. Применяя формулу Грина (13,29) к функциям u и v_1 в области D, находим

$$0 = \int_\Gamma \left(v_1 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_1}{\partial n} \right) ds. \qquad (17,29)$$

Вычитая равенство (17,29) из равенства (16,29), приходим к соотношению

$$u(x_0, y_0) = \int_\Gamma u \frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + v_1 \right) ds. \qquad (18,29)$$

Таким образом, для гармонической в области D функции $u(x, y)$ мы получили формулу (18,29), выражающую значение этой функции в произвольной точке (x_0, y_0) области D через значения на границе. Функция

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} - v_1$$

называется *функцией Грина* задачи Дирихле для области D. Из (18,29) имеем

$$u(x, y) = -\int_\Gamma f(s) \frac{\partial G}{\partial n} ds, \qquad (19,29)$$

где $f(s)$ — значения $u(x, y)$ на Γ.

При выводе соотношения (19,29) мы заранее предполагали, что существует гармоническая в D функция $u(x, y)$, принимающая на Γ значения $f(s)$. Поэтому, построив функцию Грина для области D, мы должны еще непосредственно проверить, что правая часть формулы (19,29) действительно является решением задачи Дирихле в области D с заданной граничной функцией $f(s)$.

Для некоторых областей функция Грина строится в явном виде. Так, для круга радиуса R с центром в точке O функция Грина представляется следующим образом:

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r} - \ln \frac{R}{\rho r_1} \right);$$

здесь $r = MM_0$, $\rho = OM_0$, $r_1 = MM_1$; точки M и M_0 имеют координаты (x, y) и (x_0, y_0) соответственно; M_1 — точка на продолжении радиуса OM_0, для которой $OM_1 \cdot OM_0 = R^2$. Нетрудно убедиться (мы это предоставляем читателю), что формула (19,29) в случае круга совпадает с полученной ранее другим путем формулой (10,29).

Задача 3. Постройте функцию Грина задачи Дирихле для полукруга.

§ 30. Теоремы об основных свойствах гармонических функций

Доказательства почти всех этих теорем будут основаны на том, что если функция u гармонична в каком-нибудь замкнутом круге $\overline{K}$, то ее можно представить в этом круге в виде очень удобного для исследований интеграла Пуассона. В самом деле, если функция u гармонична и, следовательно, непрерывна в круге $\overline{K}$, то по ее значениям на границе этого круга можно построить в виде интеграла Пуассона функцию u_1, гармоническую внутри K и принимающую на границе K такие же значения, как и функция u. Но по теореме о единственности решения задачи Дирихле должно быть $u_1 \equiv u$, т. е. интеграл Пуассона представляет исходную функцию u.

Теорема 1 (о среднем арифметическом). *Значение гармонической внутри некоторого круга K и непрерывной в $\overline{K}$ функции $u(x, y)$ в центре K равно среднему арифметическому ее значений на окружности.*

Доказательство. Представим u внутри K по формуле (10,29). Применяя эту формулу для центра, т. е. для $\rho = 0$, получим

$$u(0, \varphi) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} f(s)\,ds = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} u(R, \psi)\,ds, \quad (1,30)$$

где $\psi = \frac{s}{R}$, а это и значит, что $u(0, \varphi)$ равно среднему арифметическому значений u на окружности радиуса R.

Задача 1. Докажите теорему о максимуме и минимуме (§ 28), пользуясь теоремой о среднем арифметическом для гармонических функций.