здесь $r = MM_0$, $\rho = OM_0$, $r_1 = MM_1$; точки M и M_0 имеют координаты (x, y) и (x_0, y_0) соответственно; M_1 — точка на продолжении радиуса OM_0, для которой $OM_1 \cdot OM_0 = R^2$. Нетрудно убедиться (мы это предоставляем читателю), что формула (19,29) в случае круга совпадает с полученной ранее другим путем формулой (10,29).

Задача 3. Постройте функцию Грина задачи Дирихле для полукруга.

§ 30. Теоремы об основных свойствах гармонических функций

Доказательства почти всех этих теорем будут основаны на том, что если функция u гармонична в каком-нибудь замкнутом круге $\overline{K}$, то ее можно представить в этом круге в виде очень удобного для исследований интеграла Пуассона. В самом деле, если функция u гармонична и, следовательно, непрерывна в круге $\overline{K}$, то по ее значениям на границе этого круга можно построить в виде интеграла Пуассона функцию u_1, гармоническую внутри K и принимающую на границе K такие же значения, как и функция u. Но по теореме о единственности решения задачи Дирихле должно быть $u_1 \equiv u$, т. е. интеграл Пуассона представляет исходную функцию u.

Теорема 1 (о среднем арифметическом). *Значение гармонической внутри некоторого круга K и непрерывной в $\overline{K}$ функции $u(x, y)$ в центре K равно среднему арифметическому ее значений на окружности.*

Доказательство. Представим u внутри K по формуле (10,29). Применяя эту формулу для центра, т. е. для $\rho = 0$, получим

$$u(0, \varphi) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} f(s)\,ds = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} u(R, \psi)\,ds, \quad (1,30)$$

где $\psi = \frac{s}{R}$, а это и значит, что $u(0, \varphi)$ равно среднему арифметическому значений u на окружности радиуса R.

Задача 1. Докажите теорему о максимуме и минимуме (§ 28), пользуясь теоремой о среднем арифметическом для гармонических функций.

Задача 2. Пусть непрерывная в области G функция $u(x, y)$ обладает тем свойством, что ее значение в центре любого круга, лежащего целиком внутри G, равно среднему арифметическому ее значений на окружности. Докажите, что функция $u(x, y)$ является гармонической функцией.

Теорема 2. *Значение гармонической внутри некоторого круга K и ограниченной в K функции $u(x, y)$ в центре K равно среднему арифметическому ее значений в этом круге.*

Доказательство. Пусть $0 < R < R_0$, где R_0 — радиус круга K. Из (1,30) имеем

$$2R \cdot u(0, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi R} u(R, \psi)\, ds.$$

Интегрируя это равенство по R в пределах от 0 до R_0, получаем

$$R_0^2 \cdot u(0, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{R_0} dR \int_0^{2\pi R} u(R, \psi)\, ds,$$

откуда

$$u(0, \varphi) = \frac{1}{\pi R_0^2} \iint_K u(R, \psi)\, d\Omega,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Всякая гармоническая функция $u(x, y)$ аналитична по x, y.* Это значит, что функция $u(x, y)$ разлагается в степенной ряд по $(x - x_0)$, $(y - y_0)$ в окрестности точки (x_0, y_0), если точка (x_0, y_0) лежит внутри той области, где $u(x, y)$ гармонична.

Доказательство. Пусть функция $u(x, y)$ гармоническая в круге K с центром (x_0, y_0) и радиусом R. Переносом начала координат и преобразованием подобия можно достигнуть того, что точка (x_0, y_0) перейдет в начало координат, а радиус K станет равным 1. Поэтому можно считать $x_0 = y_0 = 0$ и $R = 1$.

В п. 1 § 29 было показано, что $u(x, y)$ представляется рядом (6,29). Рассмотрим теперь ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \operatorname{Reel} \left[(a_{k+1} - ib_{k+1})\, C_{k+l}^{l}\, i^l x^k y^l \right], \qquad (2,30)$$

где C_{k+l}^{l} — биномиальные коэффициенты, $k^2+l^2\neq 0$. Так как $C_{k+l}^{l}<2^{k+l}$ и a_n, b_n ограничены, то ряд (2,30) можно мажорировать сходящимся при $|x|<\frac{1}{2}$, $|y|<\frac{1}{2}$ рядом

$$M\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}2^{k+l}|x|^k|y|^l,$$

где $M>0$ постоянная.

Так как частные суммы ряда (6,29) образуют некоторую подпоследовательность частных сумм абсолютно сходящегося ряда (2,30) и ряд (6,29) сходится к $u(x, y)$, то ряд (2,30) также сходится к $u(x, y)$. Таким образом, доказано, что $u(x, y)$ разлагается в степенной ряд по x, y в окрестности точки $x=y=0$.

Теорема 4 (о равномерно сходящейся последовательности гармонических функций). *Если последовательность функций $u_k(x, y)$, $k=1,2, \ldots$, гармонических внутри конечной области G и непрерывных в $\overline{G}$, сходится равномерно на границе G, то она равномерно сходится во всей области G. При этом предельная функция будет гармонической внутри G.*

Доказательство. Согласно лемме 2 § 28 последовательность функций $u_n(x, y)$ равномерно сходится во всей области G. Остается показать, что предельная функция гармонична внутри G. Возьмем для этого какую-нибудь точку Q внутри G и построим круг K с центром в точке Q, лежащий внутри G. В этом круге каждую из функций $u_n(x, y)$ представим в виде интеграла Пуассона.

Пусть

$$u_n(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_n(\psi)\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2\rho R\cos(\varphi-\psi)}d\psi, \quad (3,30)$$

где $f_n(\psi)$ — значения u_n на границе круга K радиуса R. В силу равномерной сходимости последовательности функций $f_n(\psi)$ и сходимости u_n в любой внутренней точке (x, y) круга K в равенстве (3,30) можно перейти к пределу в обеих частях. Обозначая предельные функции соответственно через

$u(x, y)$ и $f(\psi)$, получим

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\varphi - \psi)}\, d\psi.$$

Отсюда видно, что $u(x, y)$ гармонична в круге K.

Эту теорему часто называют первой теоремой Гарнака.

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что для уравнения Лапласа совокупность обобщенных решений, определенных нами в начале § 9, совпадает с классом всех гармонических функций, если рассматривать только непрерывные решения уравнения Лапласа.

Теорема 5 (о монотонной последовательности гармонических функций). *Если последовательность гармонических в области G функций $u_n(x, y)$ сходится в некоторой внутренней точке A этой области и при любом n*

$$u_{n+1}(x, y) \geqslant u_n(x, y)$$

во всех точках области G, то последовательность $u_n(x, y)$ всюду в области G сходится к некоторой гармонической функции $u(x, y)$. При этом во всякой замкнутой ограниченной части области G сходимость будет равномерной.

Доказательство. Покажем сначала, что наша последовательность сходится равномерно во всяком круге K_1 радиуса R с центром в A, если его замыкание $\overline{K_1}$ лежит внутри G. Оценим разность $u_{n+p} - u_n = v_{n,p}$, где p — произвольное целое положительное число. В силу предположения теоремы $v_{n,p} \geqslant 0$. Возьмем концентрический с K_1 круг K^* большего, чем у K_1, радиуса $R + \varepsilon$, но все еще лежащий вместе со своей границей внутри G. Представим каждую из функций $v_{n,p}$ в круге K_1 в виде интеграла Пуассона

$$v_{n,p}(\rho, \varphi) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{n,p}(R + \varepsilon, \psi) \frac{(R+\varepsilon)^2 - \rho^2}{(R+\varepsilon)^2 + \rho^2 - 2(R+\varepsilon)\rho\cos(\varphi - \psi)}\, d\psi. \quad (4,30)$$

Так как $-1 \leqslant \cos(\varphi - \psi) \leqslant +1$, то

$$\frac{R + \varepsilon - \rho}{R + \varepsilon + \rho} \leqslant \frac{(R+\varepsilon)^2 - \rho^2}{(R+\varepsilon)^2 + \rho^2 - 2(R+\varepsilon)\rho\cos(\varphi - \psi)} \leqslant \frac{R + \varepsilon + \rho}{R + \varepsilon - \rho}. \quad (5,30)$$

Пользуясь тем, что $v_{n,p}(R+\varepsilon, \psi)\geqslant 0$, мы получаем на основании (4,30) и (5,30)

$$\frac{1}{2\pi}\frac{R+\varepsilon-\rho}{R+\varepsilon+\rho}\int\limits_0^{2\pi} v_{n,p}(R+\varepsilon, \psi)\,d\psi \leqslant v_{n,p}(\rho, \varphi) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{R+\varepsilon+\rho}{R+\varepsilon-\rho}\int\limits_0^{2\pi} v_{n,p}(R+\varepsilon,\psi)\,d\psi.$$

Но по теореме о среднем арифметическом

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{n,p}(R+\varepsilon, \psi)\,d\psi = v_{n,p}(0, \varphi) = v_{n,p}(A).$$

Поэтому

$$\frac{R+\varepsilon-\rho}{R+\varepsilon+\rho}v_{n,p}(A) \leqslant v_{n,p}(\rho, \varphi) \leqslant \frac{R+\varepsilon+\rho}{R+\varepsilon-\rho}v_{n,p}(A). \quad (6,30)$$

Отсюда видно, что последовательность u_n сходится равномерно в $\overline{K_1}$, если она сходится в точке A. Поэтому согласно первой теореме Гарнака предельная функция будет гармонической внутри K_1.

Чтобы доказать сходимость последовательности u_n в какой-нибудь точке B области G, соединим эту точку с A ломаной l, состоящей из конечного числа звеньев и лежащей целиком внутри G; это возможно по определению области. Ломаная l вместе с точками A и B есть замкнутое множество. Так как она не имеет общих точек с границей G, то, следовательно, она находится на положительном расстоянии δ от этой границы, которая также является замкнутым множеством. Возьмем теперь на пересечении окружности K_1 с линией l точку A_2. Вокруг этой точки, как центра, опишем круг K_2 радиуса $\frac{\delta}{2}$. Согласно сказанному прежде, в этом круге вместе с его границей последовательность u_n сходится равномерно. Точно также она сходится равномерно в круге K_3 радиуса $\frac{\delta}{2}$ и на его границе, если центр K_3 лежит на пересечении l с окружностью K_2. Конечным числом таких кругов K_i $(i=1, \ldots, N)$ можно покрыть всю линию и притом так, чтобы точка B лежала внутри K_N. Тем самым будет показано, что на всей линии l и, в частности, в точке B последовательность u_n сходится. Так как в каждом из кругов K_i и, в частности, в K_N эта последовательность сходится равномерно, то по первой теореме Гарнака предельная функция будет гармонической в окрестности B.

Докажем теперь, что последовательность $u_n(x, y)$ равномерно сходится на всяком замкнутом ограниченном множестве F, лежащем внутри G. По теореме Гейне — Бореля множество F можно покрыть конечным числом кругов $K_1, \ldots, K_N$, лежащих вместе со своими границами внутри G. Согласно доказанному в предыдущем абзаце последовательность $u_n(x, y)$ сходится в центре каждого из этих кругов. Следовательно, согласно тому, что было доказано выше, эта последовательность равномерно сходится в каждом из кругов K_i и, следовательно, на всем множестве F.

Эту теорему часто называют второй теоремой Гарнака.

Теорема 6 (об оценках производных гармонических функций). *Пусть в области G задано семейство равномерно ограниченных гармонических функций. Тогда в любой области G', содержащейся вместе со своей границей внутри G, равномерно ограничены производные всех функций семейства.*

Доказательство. Пусть M — верхняя грань абсолютных величин функций рассматриваемого семейства, а $l > 0$ — наименьшее расстояние от границы G' до границы G. Тогда круг K радиуса $\frac{l}{2}$ с центром в произвольной точке (x_0, y_0) области G' целиком лежит внутри G.

Так как производная гармонической функции тоже гармонична, то по теореме 2 получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2} \iint\limits_K \frac{\partial u}{\partial x} dx\,dy = \frac{4}{\pi l^2} \int\limits_S u \cos(n, x)\,ds; \tag{7,30}$$

здесь $u(x, y)$ — произвольная функция рассматриваемого семейства, S — граница круга K, n — внешняя нормаль к S. Из (7,30) вытекает неравенство

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\right| \leqslant \frac{4}{\pi l^2} M \cdot 2\pi \frac{l}{2} = \frac{4M}{l};$$

ввиду произвольности точки (x_0, y_0) и функции u отсюда следует равномерная ограниченность в G' производных по x от функций семейства. Аналогично доказывается равномерная ограниченность в G' их производных по y.

Теорема 7 (о компактности семейства равномерно ограниченных гармонических функций). *Из любого бесконечного семейства гармонических функций, равномерно ограниченных в области G, можно выделить бесконечную последовательность, равномерно сходящуюся в любой ограниченной области G', содержащейся вместе с границей внутри G.*

Это утверждение вытекает из теоремы Арцеля, так как все функции семейства в G' являются равностепенно непрерывными вследствие теоремы 6.

Теорема 8. (Теорема Лиувилля). *Гармоническая на всей плоскости функция $u(x, y)$ не может быть ограниченной сверху или снизу, если она не постоянна.*

Доказательство. Пусть, например, всегда $u(x, y) \geqslant M$, где M — некоторая постоянная. Прибавляя в случае надобности к функции $u(x, y)$ постоянную, мы всегда можем достигнуть того, чтобы было $M \geqslant 0$. Принимая это предположение, покажем, что значение u в любой точке $Q(\rho, \varphi)$ в точности равно значению u в начале координат (полюсе) O. Этим самым будет показано, что u — постоянная. Возьмем для этого круг K с центром в точке O такого большого радиуса R, чтобы точка $Q(\rho, \varphi)$ лежала внутри него. Представляя в K функцию u в виде интеграла Пуассона, получим

$$u(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \psi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\varphi - \psi)} d\psi.$$

Отсюда получаем аналогично (6,30)

$$\frac{R-\rho}{R+\rho} u(O) \leqslant u(Q) \leqslant \frac{R+\rho}{R-\rho} u(O).$$

При $R \to \infty$ получаем $u(O) \leqslant u(Q) \leqslant u(O)$, откуда $u(Q) = u(O)$.

Так как Q — произвольная точка плоскости, то это равенство означает постоянство функции u.

Теорема 9 (об устранимой особенности). *Пусть $u(x, y)$ — ограниченная функция, гармоническая в окрестности точки A, за исключением самой точки A, где $u(x, y)$ не определена. Тогда функцию $u(x, y)$ можно в точке A определить так, чтобы $u(x, y)$ была гармонической во всей рассматриваемой окрестности точки A, в том числе и в самой точке A.*

Доказательство. Для простоты обозначений примем точку A за начало координат. Пусть K — круг радиуса R с центром в A, целиком лежащий внутри рассматриваемой окрестности A. Пусть u_1 — гармоническая внутри K функция, которая совпадает с u на границе K. Положим $u - u_1 \equiv v$. Функция $v(x, y)$ будет ограниченной и гармонической во всем круге K, кроме точки A, где она не определена. На окружности K функция v обращается в нуль. Покажем, что всюду внутри K, кроме точки A, $v \equiv 0$ и, следовательно, $u = u_1$. Если, показав это, мы положим в самой точке A функцию v равной нулю и, следовательно, $u = u_1$, то тем самым будет доказана наша теорема.

Чтобы доказать тождество $v \equiv 0$ во всем круге K, кроме точки A, построим в этом круге функцию

$$w_\varepsilon(P) = \frac{M \ln \frac{\rho}{R}}{\ln \frac{\varepsilon}{R}},$$

где M—верхняя грань $|v|$ в K, ε — некоторое малое положительное число, а $\rho = AP$. Функция $w_\varepsilon(P)$ является гармонической функцией в области, ограниченной окружностями $\rho = R$ и $\rho = \varepsilon$, обращается в нуль при $\rho = R$ и в M при $\rho = \varepsilon$. На основании теоремы о максимуме и минимуме гармонических функций для любой точки P, лежащей в кольце между окружностями $\rho = R$ и $\rho = \varepsilon$, при любом ε

$$|v(P)| \leqslant M \frac{\ln \frac{\rho}{R}}{\ln \frac{\varepsilon}{R}}, \tag{8,30}$$

так как на этих окружностях $-w_\varepsilon(P) \leqslant v(P) \leqslant w_\varepsilon(P)$. Но при $\varepsilon \to 0$ правая часть неравенства (8,30) стремится к нулю.

Поэтому левая часть равна нулю, так как она не зависит от ε.

Замечание 1. Теорема 9 верна в более общей формулировке: пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция в окрестности точки A, за исключением самой точки A, где $u(x, y)$ не определена, и для любой точки P из этой окрестности

$$|u(P)| \leqslant \mu(P) \ln \frac{1}{AP}, \tag{9,30}$$

где $\mu(P) \to 0$, когда $P \to A$. При этих условиях функцию $u(x, y)$ можно в точке A определить так, чтобы $u(x, y)$ была гармонической во всей рассматриваемой окрестности точки A, в том числе и в самой точке A.

Доказательство этого предложения аналогично доказательству теоремы 9.

Замечание 2. Пусть $u(x, y)$ — ограниченная и гармоническая в области G функция, непрерывная во всех точках границы G, за исключением конечного числа точек. При этих условиях функция $u(x, y)$ не может внутри области G принимать значения, бо́льшие, чем верхняя грань значений $u(x, y)$ на границе области G, и меньшие, чем нижняя грань значений $u(x, y)$ на границе G.

Действительно, пусть M — верхняя грань значений $u(x, y)$ на границе G. Для простоты предположим, что $u(x, y)$ непрерывна во всех точках границы G, за исключением одной точки P_1. Пусть все точки G отстоят от P_1 не больше, чем на R. Построим функцию $w_\varepsilon(P) = M + \varepsilon \ln \frac{R}{P_1P}$. Рассмотрим область G_δ, состоящую из точек области G, расстояние от которых до P_1 больше δ. Легко видеть, что на границе этой области $u(P) < w_\varepsilon(P)$, если δ достаточно мало. По теореме о максимуме и минимуме гармонических функций $u(P) < w_\varepsilon(P)$ в G_δ. Устремляя ε к нулю, получим, что $u(P) \leqslant M$ в любой точке P области G. Точно так же получаем, что $u(P) \geqslant m$, где m — нижняя грань значений $u(x, y)$ на границе области G.

Замечание 3. Все доказанные в настоящем параграфе свойства гармонических функций от двух независимых переменных сохраняются для гармонических функций любого числа независимых переменных и могут быть доказаны аналогично.

При этом условие (9,30) в случае $n > 2$ независимых переменных заменяется условием

$$|u(P)| \leqslant \mu(P) \frac{1}{(AP)^{n-2}},$$

где AP — расстояние от точки A до P, и $\mu(P) \longrightarrow 0$, когда $P \longrightarrow A$.

§ 31. Доказательство существования решения задачи Дирихле

Идея приведенного ниже доказательства принадлежит Пуанкаре. Первоначальное доказательство Пуанкаре несколько улучшил Перрон. Так как последующие рассуждения одинаково применимы к областям любого числа измерений, то мы не будем ограничиваться рассмотрением только двумерного случая.

1. Основные определения и метод решения задачи. Пусть внутри n-мерной ограниченной области G и на ее границе задана непрерывная функция v; через K будем всегда обозначать какой-нибудь n-мерный шар, все внутренние точки которого принадлежат G, через $(v)_K$ — непрерывную функцию, равную v вне K и на его границе и гармоническую внутри этого шара K. Для того чтобы функция v была гармонической, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы для всякого шара *) K было $(v)_K \equiv v$.

Будем называть функцию v *супергармонической* (соответственно *субгармонической*), если для всякого шара K

$$(v)_K \leqslant v \quad \text{(соответственно } (v)_K \geqslant v). \tag{1,31}$$

Назовем *верхней* (соответственно *нижней*) функцией для заданной на границе G непрерывной функции f супергармоническую (соответственно субгармоническую) в области G функцию v, если на границе G

$$v \geqslant f \qquad \text{(соответственно } v \leqslant f).$$

Во всем дальнейшем мы будем рассматривать только такие супергармонические и субгармонические верхние и нижние функции, которые непрерывны внутри G и на ее границе. Поэтому, говоря о супер- и субгармонических функциях, мы

*) При $n=2$ надо было бы K назвать кругом, а не шаром.