При этом условие (9,30) в случае $n>2$ независимых переменных заменяется условием

$$|u(P)|\leqslant\mu(P)\frac{1}{(AP)^{n-2}},$$

где AP — расстояние от точки A до P, и $\mu(P)\to 0$, когда $P\to A$.

§ 31. Доказательство существования решения задачи Дирихле

Идея приведенного ниже доказательства принадлежит Пуанкаре. Первоначальное доказательство Пуанкаре несколько улучшил Перрон. Так как последующие рассуждения одинаково применимы к областям любого числа измерений, то мы не будем ограничиваться рассмотрением только двумерного случая.

1. Основные определения и метод решения задачи. Пусть внутри n-мерной ограниченной области G и на ее границе задана непрерывная функция v; через K будем всегда обозначать какой-нибудь n-мерный шар, все внутренние точки которого принадлежат G, через $(v)_K$ — непрерывную функцию, равную v вне K и на его границе и гармоническую внутри этого шара K. Для того чтобы функция v была гармонической, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы для всякого шара *) K было $(v)_K\equiv v$.

Будем называть функцию v *супергармонической* (соответственно *субгармонической*), если для всякого шара K

$$(v)_K\leqslant v \quad (\text{соответственно } (v)_K\geqslant v). \tag{1,31}$$

Назовем *верхней* (соответственно *нижней*) функцией для заданной на границе G непрерывной функции f супергармоническую (соответственно субгармоническую) в области G функцию v, если на границе G

$$v\geqslant f \qquad (\text{соответственно } v\leqslant f).$$

Во всем дальнейшем мы будем рассматривать только такие супергармонические и субгармонические верхние и нижние функции, которые непрерывны внутри G и на ее границе. Поэтому, говоря о супер- и субгармонических функциях, мы

*) При $n=2$ надо было бы K назвать кругом, а не шаром.

будем предполагать их непрерывными внутри и на границе G, не оговаривая этого особо.

Метод Пуанкаре-Перрона состоит в следующем. Для заданной ограниченной области G и заданной на ее границе непрерывной функции f мы определяем семейство всех верхних функций. Ясно, что это семейство не пусто, потому что всякая постоянная $c \geqslant \sup f$ уже является верхней функцией. Определим значение функции u в точке P, принадлежащей $\overline{G}$, как нижнюю грань значений в этой точке всех верхних функций. Мы докажем, что функция u является гармонической внутри G, принимает заданные значения f и непрерывна в тех граничных точках этой области, где выполняются некоторые условия, о которых мы скажем ниже. Предварительно нам надо будет доказать несколько свойств супергармонических и верхних функций.

2. Некоторые свойства супергармонических и верхних функций.

Теорема 1). а) *Всякая гармоническая функция супергармонична и субгармонична.*

б) *Если v супергармонична, а u гармонична, по $v+u$ супергармонична.*

в) *Сумма двух (и, следовательно, любого конечного числа) супергармонических функций супергармонична*

г) *Если v супергармонична, а w субгармонична, то $v-w$ супергармонична.*

Аналогичные теоремы справедливы для субгармонических функций.

Первое из этих утверждений очевидно. Остальные три доказываются легко, если мы примем во внимание, что

$$(v_1+v_2)_K = (v_1)_K + (v_2)_K.$$

Пользуясь этим соотношением, докажем, например, утверждение в). Пусть v_1 и v_2 — две супергармонические функции. Тогда

$$(v_1)_K \leqslant v_1, \quad (v_2)_K \leqslant v_2,$$

следовательно,

$$(v_1+v_2)_K = (v_1)_K + (v_2)_K \leqslant v_1 + v_2,$$

т. е. v_1+v_2 — супергармоническая функция.

Теорема 2. *Супергармоническая в области G функция v принимает наименьшее значение на границе G.*

Доказательство. Допустим, что функция v принимает свое наименьшее значение m в некоторой точке P, находящейся внутри G. Тогда вокруг этой точки, как центра, можно описать такой шар K, касающийся границы G, на границе которого v всюду должна быть равна m; в противном случае по теореме о среднем арифметическом в точке P было бы

$$v<(v)_K.$$

Следовательно, функция v должна быть равной m в некоторых точках границы G.

Теорема 3. *Всякая верхняя функция v нигде не меньше любой нижней функции w.*

Доказательство. Супергармоническая функция $v-w$ по теореме 2 принимает наименьшее значение на границе области, но там она неотрицательна; следовательно, она неотрицательна и внутри области.

Теорема 4. *Функция*

$$v=\min\{v_1, v_2, \ldots, v_n\},$$

где $v_1, v_2, \ldots, v_n$ суть верхние функции, есть также верхняя функция.

Доказательство. Ясно, что функция v непрерывна внутри G и на ее границе и что на границе G

$$v\geqslant f.$$

Остается доказать, что v удовлетворяет неравенству (1,31) для всякого шара K. Для этого заметим, что $v(P)$ равно значению в точке P одной из функций $v_1, v_2, \ldots, v_n$, например v_1. Поэтому в точке P

$$v=v_1\geqslant(v_1)_K\geqslant(v)_K,$$

что и доказывает неравенство (1,31). Здесь мы пользуемся тем, что если $v\leqslant v_1$, то всегда $(v)_K\leqslant(v_1)_K$

Теорема 5. *Если v есть верхняя функция, то $(v)_K$ есть также верхняя функция.*

Доказательство. Положим

$$(v)_K=z.$$

Из всех свойств, которым должна удовлетворять верхняя функция, очевидно, нуждается в доказательстве только то, что для всякого шара K_1

$$(z)_{K_1} \leqslant z. \tag{2,31}$$

Это свойство также очевидно, если шар K_1 лежит целиком внутри K или вне K. Остается рассмотреть только тот случай, когда шар K лежит внутри K_1 или когда границы этих шаров пересекаются.

На границе K_1

$$z \leqslant v.$$

Поэтому и внутри K_1

$$(z)_{K_1} \leqslant (v)_{K_1},$$

так как обе функции $(z)_{K_1}$ и $(v)_{K_1}$ гармоничны внутри K_1. В силу супергармоничности v

$$(v)_{K_1} \leqslant v.$$

Вне шара K и на его границе функции z и v совпадают. Поэтому лежит ли K внутри K_1 или их границы пересекаются, справедливо соотношение (2,31) вне K и на его границе. Справедливость же этого соотношения внутри пересечения KK_1 шаров K и K_1 следует из того, что функции z и $(z)_{K_1}$ гармоничны внутри KK_1 и потому раз соотношение (2,31) имеет место на границе области KK_1, оно имеет место и внутри этой области.

3. Доказательство того, что нижняя грань $u(P)$ всех верхних функций гармонична. Чтобы доказать гармоничность функции u во всей области, очевидно, достаточно доказать гармоничность ее в любом шаре K. Возьмем одну из верхних функций v_1, которая в центре P шара K принимает значение, не большее $u(P)+\varepsilon$. Мы можем считать v_1 гармонической внутри K; если бы v_1 не была гармонической внутри K, то вместо v_1 мы могли бы взять $(v_1)_K$, которая, согласно теореме 5, также есть верхняя функция и которая так же, как и v_1, принимает в точке P значение, не большее $u(P)+\varepsilon$.

Возьмем, далее, верхнюю функцию v_2', которая в точке P принимает значение, не большее, чем $u(P)+\frac{\varepsilon}{2}$. Положим

$$v_2 = (\min(v_1, v_2'))_K.$$

По теоремам 4 и 5 функция v_2 также есть верхняя функция.

Продолжая такие же построения, мы получим бесконечную убывающую последовательность верхних функций v_1, v_2, .., v_n, ..., гармонических внутри K. Эта последовательность ограничена снизу (теорема 3). Следовательно, по теореме 5 § 30 (вторая теорема Гарнака) эта последовательность внутри K равномерно сходится к некоторой гармонической функции v.

Докажем, что внутри K

$$v = u.$$

Допустим, что это не так. Тогда существует верхняя функция z, которая в некоторой точке P_1 внутри шара K принимает значение, меньшее, чем $v(P_1)$. Опишем шар K_1 радиуса ρ с центром в точке P, на поверхности которого лежит точка P_1. Тогда всякая функция

$$z_n = (\min(z, v_n))_{K_1}$$

есть верхняя функция. А так как последовательность v_n в $\overline{K}_1$ сходится равномерно к v, то $z_n(P)$ также сходится равномерно в $\overline{K}_1$ и потому при достаточно большом n отличается как угодно мало от значения в точке P функции $(\min(z, v))_{K_1}$, которое меньше, чем $v(P)$, равное $u(P)$. Это, однако, противоречит предположению, что $u(P)$ есть нижняя грань значений всех верхних функций в точке P.

Нижнюю грань всех верхних функций принято называть обобщенным решением задачи Дирихле, соответствующим заданной граничной функции f. Очевидно, что если существует решение задачи Дирихле в области G, принимающее заданные значения f на границе, то это решение совпадает с обобщенным решением задачи Дирихле, соответствующим заданной функции f. Точку Q границы области G мы будем называть регулярной, если для любой непрерывной функции f, заданной на границе области G, обобщенное решение задачи Дирихле, соответствующее функции f, в точке Q непрерывно и равно $f(Q)$. Ниже мы укажем ряд достаточных условий регулярности точки Q границы области G.

4. Поведение функции $u(P)$ на границе G.

Теорема. *Функция $u(P)$ непрерывна и принимает значение $f(Q)$ в граничной точке Q, если для этой точки удовлетворяется следующее*

Условие А. *Существует непрерывная внутри G и на ее границе супергармоническая функция ω_Q (барьер), обладающая следующими свойствами:*

1) $\omega_Q(Q)=0$,

2) *во всех точках P области G и ее границы, кроме точки Q,*

$$\omega_Q(P)>0.$$

Доказательство. Каково бы ни было произвольно малое положительное число ε, в силу непрерывности f всегда можно окрестность U_Q точки Q выбрать настолько малой, чтобы в каждой ее точке P, принадлежащей границе G, было

$$f(Q)-\varepsilon\leqslant f(P)\leqslant f(Q)+\varepsilon.$$

Поэтому, пользуясь тем, что всюду в $\bar{G}$ вне U_Q функция $\omega_Q(P)$ превосходит некоторую положительную постоянную, легко показать, что функция

$$\varphi(P)=f(Q)-\varepsilon-C\omega_Q(P),$$

если только $C>0$ выбрано достаточно большим, будет нижней функцией, а функция

$$\psi(P)=f(Q)+\varepsilon+C\omega_Q(P)$$

будет верхней функцией.

Докажем, например, что функция $\psi(P)$ есть верхняя функция. Легко видеть, что она супергармонична при всяком неотрицательном C. Остается показать, что на границе G она нигде не меньше f. Справедливость этого утверждения в окрестности U_Q точки Q следует из определения окрестности U_Q и того, что $C\omega_Q(P)\geqslant 0$. Вне же этой окрестности $\omega_Q(P)$, по предположению, превосходит некоторую положительную постоянную и потому при достаточно большом C величина $C\omega_Q(P)$ может быть сделана как угодно большой на всей границе G вне U_Q.

Очевидно, функция $u(P)$ при всяком $\varepsilon>0$ заключена между этими двумя непрерывными функциями $\varphi(P)$ и $\psi(P)$ и, следовательно,

$$f(Q)-\varepsilon=\varphi(Q)\leqslant\varliminf_{P\to Q}u(P)\leqslant\varlimsup_{P\to Q}u(P)\leqslant\psi(Q)=f(Q)+\varepsilon.$$

А так как ε произвольно мало, то, следовательно,

$$\lim_{P\to Q} u(P) = f(Q),$$

и построенная нами функция $u(P)$ непрерывна в точке Q.

При $n > 2$ легче всего построить барьер для такой граничной точки Q, для которой существует n-мерный шар с центром в некоторой точке O, внутри которого нет ни одной точки области G, а граница которого имеет только одну точку Q, общую с границей G. Тогда за функцию $\omega_Q(P)$ можно взять функцию

$$\frac{1}{OQ^{n-2}} - \frac{1}{PO^{n-2}},$$

где PO (соответственно OQ) означает расстояние между точками P и O (соответственно O и Q). При всяком $n > 2$ эта функция гармонична.

В случае $n = 2$ можно показать, что всякая граничная точка Q области, ограниченной одной непересекающейся кривой, удовлетворяет условию A. Действительно, если точку Q принять за начало координат, то функция $-\frac{p}{p^2+q^2}$, где p и q суть соответственно действительная и мнимая части $\ln\frac{x+iy}{2D}$, обладает всеми свойствами функции ω_Q, если D означает диаметр области G. Но функция

$$-\frac{p}{p^2+q^2} = -\mathrm{Reel}\,\frac{1}{\ln\frac{x+iy}{2D}}$$

может перестать обладать этими свойствами, если точка Q лежит на границе неодносвязной области G. Так будет, например, в том случае, если область G заключена между двумя концентрическими окружностями и точка Q лежит на меньшей из них. В этом случае функция $-\frac{p}{p^2+q^2}$ перестает быть однозначной. Поэтому условие A целесообразно заменить следующим более общим.

У с л о в и е B. *Для как угодно малой окрестности* U_Q *точки* Q (U_Q здесь означает ту часть полной окрестности точки, которая принадлежит области G и ее границе) *суще-*

ствует однозначная супергармоническая функция Ω_Q (*барьер*), *обладающая следующими свойствами*:

1. Ω_Q *определена внутри* U_Q *и на ее границе, причем всюду непрерывна.*

2. $\Omega_Q(Q)=0$.

3. $\Omega_Q>0$ *во всех точках, кроме* Q.

Из этих трех свойств Ω_Q следует и ее четвертое свойство.

4. $\Omega_Q\geqslant k>0$ *в тех граничных точках* U_Q, *которые принадлежат* G; *здесь* k — *некоторая постоянная.*

Покажем, что если точка Q удовлетворяет условию B, то она удовлетворяет также условию A. Построим для этого функцию $\omega_Q(P)$, положив

$$\omega_Q(P)=\min\left\{\frac{2}{k}\Omega_Q(P),\ 1\right\} \quad \text{в} \quad U_Q,$$

$$\omega_Q(P)=1 \quad \text{вне} \quad U_Q.$$

Мы утверждаем, что эта функция обладает всеми свойствами, перечисленными в условии A. Действительно,

1) $\omega_Q(P)$ непрерывна в $\overline{G}$,

2) $\omega_Q(Q)=0$,

3) $\omega_Q>0$ во всех точках $\overline{G}$, кроме точки Q.

4) Остается показать супергармоничность функции $\omega_Q(P)$, т. е. что

$$(\omega_Q)_K\leqslant\omega_Q. \tag{3,31}$$

Обозначим через G_1 ту часть G, где $\omega_Q=1$, и через G_0 — остальную часть области G. Тогда справедливость соотношения (3,31) будет очевидной в том случае, если внутри шара K имеются точки или только из G_1, или только из G_0. Остается рассмотреть последний возможный случай, когда внутри шара K имеются точки как из G_1, так и из G_0. В этом случае справедливость соотношения (3,31) для той части шара K, которая принадлежит G_1, следует из того, что там $\omega_Q=1$, а $(\omega_Q)_K\leqslant 1$. Справедливость же соотношения (3,31) для точек пересечения KG_0 областей K и G_0 следует из того, что в каждой из тех областей, на которые распадается KG_0, функция ω_Q супергармонична, а функция $(\omega_Q)_K$ гармонична; кроме того, значения ω_Q на границе каждой такой области не меньше значений $(\omega_Q)_K$.

Для $n=1$ рассматриваемая краевая задача тривиальна. Поэтому во всем дальнейшем мы будем считать $n \geqslant 2$.

В случае $n=2$ легко показать, что всякая граничная точка Q области G удовлетворяет условию B, если точка Q является концом некоторой кривой l, лежащей вне $G+\Gamma$ и пересекающей все окружности достаточно малого радиуса с центром в точке Q.

Действительно, перенесем начало координат в точку Q и будем считать, что окрестность U_Q так мала, что все ее точки отстоят от Q меньше, чем на c, где $c<1$, и дуга l пересекает границу круга, содержащего U_Q. Если теперь положить $\ln(x+iy)=p+iq$, то функция

$$\Omega_Q=-\frac{p}{p^2+q^2}$$

будет обладать всеми свойствами, перечисленными в условии B.

В случае $n>2$ нетрудно построить функцию Ω_Q для всякой граничной точки Q, которая служит вершиной некоторого круглого n-мерного конуса C_Q с прямолинейными образующими, у которого все точки, достаточно близкие к Q, лежат вне G. Для этого рассмотрим односвязную область G^*, образованную точками, лежащими внутри некоторой n-мерной сферы S радиуса R с центром в точке Q и вне конуса C_Q. На границе G^* зададим функцию f^*, положив

$$f^*(P)=QP,$$

где QP означает расстояние между точками P и Q. Нижняя грань u^* всех верхних функций, построенных для области G^* и функции f^*, принимает на основании критерия с шаром, сформулированного на стр. 268, значение f^* во всех точках границы G^*, за исключением точки Q, к которой этот критерий неприменим. Чтобы убедиться в том, что функция u^* обладает всеми свойствами функции Ω_Q, нужно еще доказать, что она в точке Q принимает значение 0. Для этого заметим прежде всего, что $\underline{u}^*(Q) \geqslant 0$, так как функция, равная тождественно нулю, есть нижняя. Мы обозначаем здесь

$$\underline{u}^*(Q)=\varliminf_{P\to Q} u^*(P), \text{ соответственно } \overline{u}^*(Q)=\varlimsup_{P\to Q} u^*(P).$$

Остается показать, что

$$\bar{u}^*(Q) = 0.$$

Допустим, что это не так, и значит,

$$\bar{u}^*(Q) = c > 0. \tag{4,31}$$

Примем тогда точку Q за начало координат и рассмотрим функцию

$$u^{**}(x_1, \ldots, x_n) = u^*(kx_1, \ldots, kx_n),$$

где $k > 1$. Очевидно,

$$\bar{u}^{**}(Q) = \bar{u}^*(Q) = c > 0.$$

Но, с другой стороны, пользуясь тем, что $u^*(P) < R$ внутри G^*, легко видеть, что всюду на границе области G^{**}, где определена функция u^{**}, за исключением только точки Q,

$$u^* \leqslant c_1 u^{**}, \tag{5,31}$$

где c_1 есть некоторая постоянная, меньшая единицы, зависящая от k. Функция $u^* - c_1 u^{**}$, гармоническая в G^{**}, непрерывна во всех точках границы G^{**}, за исключением точки Q, и верхняя грань значений $u^* - c_1 u^{**}$ на границе G^{**} неположительна. Поэтому согласно замечанию 2 к § 30 $u^* - c_1 u^{**} \leqslant 0$ всюду в области G^{**}.

Из того, что соотношение (5,31) выполняется во всей области G^{**}, следует, что

$$\bar{u}^*(Q) \leqslant c_1 \bar{u}^{**}(Q) = c_1 c.$$

Так как $c_1 < 1$, то это соотношение находится в противоречии с (4,31), если $c > 0$.

Задача 1. Покажите, что не существует функции $u(x, y)$, непрерывной в круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$ и гармонической всюду внутри этого круга, кроме его центра, которая принимает значение 0 на окружности и значение 1 в центре.

Задача 2. Покажите, что не существует функции $u(x, y, z)$, непрерывной в цилиндре $\{x^2 + y^2 \leqslant 1, -1 \leqslant z \leqslant 1\}$ и гармонической всюду внутри этого цилиндра, кроме отрезка $-\frac{1}{2} \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}$, $x = y = 0$, которая принимает на этом отрезке значение 1, а на границе цилиндра — значение 0.