§ 32. Внешняя задача Дирихле

Внешней задачей Дирихле мы будем называть следующую задачу.

Пусть дана некоторая ограниченная область G такая, что точки, не принадлежащие G и ее границе Γ, образуют область с границей Γ. Пусть на границе этой области задана непрерывная функция f. Требуется найти функцию $u(P)$, гармоническую вне $G+\Gamma$ и принимающую на Γ заданные значения f.

Мы говорим здесь, что функция u принимает заданные на границе G значения f, если функция v, которая совпадает с u вне $G+\Gamma$ и с f на Γ, непрерывна на всем множестве ее определения.

Пример. Пусть в каждой точке (x, y, z) пространства вне некоторого тела и на границе этого тела установилась определенная, не зависящая от времени, температура u. Известно, что в таком случае u удовлетворяет уравнению Лапласа вне G. Таким образом, чтобы найти установившуюся температуру вне G, приходится решать внешнюю задачу Дирихле.

Если не накладывать никакого ограничения на поведение решения внешней задачи Дирихле в далеких точках пространства, то эта задача имеет много решений. Для того чтобы гарантировать единственность ее решения, в двумерном случае требуют ограниченности решения, в многомерном случае — стремления этого решения к нулю при стремлении точки P в бесконечность (функция $u(P)$ стремится к нулю при $P \to \infty$, если $|u(P)| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное число, для всех точек P, лежащих вне шара достаточно большого радиуса с центром в начале координат).

Решение внешней задачи Дирихле сводится к решению задачи Дирихле для ограниченных областей, которую мы рассматривали в § 31 и которую теперь, в отличие от внешней задачи Дирихле, будем называть внутренней задачей Дирихле. При этом выявляется роль тех дополнительных условий в бесконечности, которые налагаются на решение внешней задачи Дирихле (точнее, которые налагаются на значения этого решения в далеких точках).

Возьмем внутри области G некоторую точку O и сферу (окружность в двумерном случае) S радиуса R с центром в точке O. Сделаем преобразование пространства обратными радиусами-векторами относительно этой сферы, т. е. такое преобразование, при котором каждой точке P этого пространства ставится в соответствие точка P^*, лежащая на луче OP, для которой $OP \cdot OP^* = R^2$. При этом преобразовании точки сферы S остаются неизменными, вся та часть пространства, которая лежит вне (соответственно внутри) S, переходит в ту часть пространства, которая лежит внутри (соответственно вне) S.

Таким образом, все те точки пространства, которые лежат вне G, преобразуются в точки некоторой ограниченной области G^*, окружающей точку O. Каждой точке G^*, кроме O, при таком преобразовании соответствует одна и только одна точка, лежащая вне G. Только самой точке O при этом преобразовании не ставится в соответствие никакая точка пространства. Дальнейшее рассмотрение надо отдельно проводить для пространства двух измерений (плоскости) и пространства трех измерений.

Рассмотрим сначала случай плоскости. Пусть u есть решение внешней задачи Дирихле для области G. Положим

$$u^*(P^*) = u(P) \quad \text{и} \quad f^*(P^*) = f(P).$$

Функция u^* будет определена всюду в области G^*, кроме точки O, и будет принимать значение $f^*(P^*)$ на границе G^*. Прямыми выкладками можно показать *), что функция $u^*(P^*)$ будет гармонической функцией координат точки P^* (короче, гармонической функцией P^*), если $u(P)$ была гармонической функцией P.

Если функция $u(P)$ была ограничена, то $u^*(P^*)$ также ограничена. Тогда по теореме об устранимой особенности u^* можно так доопределить в точке O, чтобы полученная функция была гармонической всюду внутри G^*. По теореме о единственности решения внутренней задачи Дирихле отсюда будет следовать, что ограниченная функция u^* единственным образом определяется в G^* своими значениями на границе. А отсюда следует единственность решения внешней задачи Дирихле в классе ограниченных функций. Существование

---

*) Чтобы это проверить, надо привести уравнение Лапласа к полярным координатам с полюсом в точке O, в которых наше преобразование записывается наиболее простыми формулами.

решения вытекает из того, что все точки границы G^* ввиду связности G являются регулярными (см. стр. 270).

Случай трех измерений. Пусть опять u есть решение внешней задачи Дирихле для области G. Положим

$$u^*(P^*) = \frac{R}{OP^*} u(P)$$

или, что эквивалентно,

$$u(P) = \frac{R}{OP} u^*(P^*). \tag{1,32}$$

Аналогично положим

$$f^*(P^*) = \frac{R}{OP^*} f(P)$$

или, что эквивалентно,

$$f(P) = \frac{R}{OP} f(P^*).$$

Этим функция u^* определяется всюду внутри G^*, кроме точки O. Она будет принимать значение f^* на всей границе G^*. Приведя уравнение к сферическим координатам, можно прямыми выкладками показать, что $u^*(P^*)$ будет гармонической функцией P^*, если $u(P)$ была гармонической функцией P. Если $u(P)$ стремилась к нулю при $P \to \infty$, то $u^*(P^*)$, как легко видеть, будет удовлетворять условию

$$|u^*(P^*)| \leqslant |u(P)| \frac{R}{OP^*}, \text{ где } |u(P)| \to 0 \text{ при}$$

$OP^* \to 0$. Тогда, согласно замечаниям 1 и 3 к § 30, u^* можно так доопределить в точке O, чтобы полученная функция была гармонической всюду внутри G^*. В силу единственности решения внутренней задачи Дирихле отсюда будет следовать, что ограниченная функция u^* единственным образом определяется в G^* своими значениями на ее границе. А отсюда следует единственность решения внешней задачи Дирихле в классе функций, стремящихся к нулю при $P \to \infty$.

Если область G^* такова, что все ее граничные точки регулярны, то из предыдущих рассуждений будет следовать также существование решения внешней задачи Дирихле для области G при всякой непрерывной функции, заданной на ее границе, причем решение это будет, как легко видеть из (1,32), удовлетворять условию

$$|u(P)| \leqslant \frac{M}{OP},$$

где M — некоторая постоянная, OP — расстояние точки P до некоторой фиксированной точки O.

Примеры. Решением внешней задачи Дирихле на плоскости, когда заданная на границе функция всюду равна постоянной C, является функция, также всюду равная C. Это единственное решение в классе ограниченных функций.

Решением внешней задачи Дирихле в трехмерном пространстве, когда область ограничена сферой радиуса R с центром в точке O и когда функция, заданная на этой сфере, равна постоянной C, служит функция

$$u(P) = \frac{C \cdot R}{OP}. \tag{2,32}$$

Это единственное решение рассматриваемой внешней задачи Дирихле в классе функций, стремящихся к нулю при $OP \to \infty$.

Можно показать, что к постоянной C в двумерном случае и к функции (2,32) в трехмерном случае приближаются решения следующих двух задач теплопроводности:

1. На поверхности бесконечно длинной цилиндрической трубы задается постоянная температура, равная C. Начальная температура окружающего воздуха равна нулю. Тогда температура $u(t, x, y, z)$ воздуха в момент t в точке (x, y, z) при $t \to \infty$ стремится к C. Физически это означает, что бесконечно длинной трубой, на поверхности которой задается постоянная температура C, можно нагреть весь окружающий воздух до температуры C.

2. На поверхности шара с центром в O радиуса R поддерживается постоянная температура C. Начальная температура окружающего воздуха всюду равна нулю. Тогда температура $u(t, x, y, z)$ воздуха в момент t в точке (x, y, z) при $t \to \infty$ приближается к функции (2,32).

Задача 1. Докажите, что любая ограниченная и гармоническая вне конечной замкнутой области функция $u(x, y)$ стремится к некоторому пределу при $x^2 + y^2 \to \infty$.

Задача 2. Докажите при помощи преобразования обратными радиусами-векторами единственность решения внешней задачи Дирихле в классе ограниченных функций для плоского случая и в классе функций, стремящихся к нулю при $OP \to \infty$ для случая пространства трех измерений, если область G бесконечна.

§ 33. Вторая краевая задача

1. Внутренняя вторая краевая задача. Будем предполагать, что область G на плоскости (x, y) конечна и ограничена кривой Γ, имеющей в каждой точке ограниченную кривизну. Как мы уже говорили (§ 27), вторая краевая задача состоит в том, чтобы найти внутри G гармоническую функцию $u(x, y)$, непрерывную в $G+\Gamma$, у которой производная по направлению внешней нормали в каждой точке границы G равна значению в этой точке заданной функции f. Функцию f будем считать непрерывной. Эту задачу называют еще внутренней второй краевой задачей в отличие от внешней второй краевой задачи, которую мы рассмотрим в п. 3. В § 28 мы показали, что все решения внутренней второй краевой задачи с заданной функцией f могут отличаться между собой только постоянными слагаемыми.

Необходимым условием существования решения внутренней второй краевой задачи является следующее условие: интеграл от f по границе области G должен быть равен нулю.

Мы докажем необходимость этого условия, предполагая, что $u(x, y)$ имеет внутри G ограниченные непрерывные производные второго порядка, а $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ имеют непрерывное продолжение на границу G. В § 35 мы освободимся от этих ограничений. В том же параграфе мы докажем существование решения второй краевой задачи, если выполнено сформулированное выше необходимое условие.

Пусть $u(x, y)$ — решение второй краевой задачи в области G и $\frac{\partial u}{\partial n}=f(s)$ на Γ. Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy.$$

Он равен нулю, так как функция u гармонична. Преобразуя этот интеграл в интеграл по границе Γ области G согласно