задачи Дирихле в классе ограниченных функций для плоского случая и в классе функций, стремящихся к нулю при $OP \to \infty$ для случая пространства трех измерений, если область $G$ бесконечна.

## § 33. Вторая краевая задача

1. Внутренняя вторая краевая задача. Будем предполагать, что область $G$ на плоскости $(x, y)$ конечна и ограничена кривой $\Gamma$, имеющей в каждой точке ограниченную кривизну. Как мы уже говорили (§ 27), вторая краевая задача состоит в том, чтобы найти внутри $G$ гармоническую функцию $u(x, y)$, непрерывную в $G+\Gamma$, у которой производная по направлению внешней нормали в каждой точке границы $G$ равна значению в этой точке заданной функции $f$. Функцию $f$ будем считать непрерывной. Эту задачу называют еще внутренней второй краевой задачей в отличие от внешней второй краевой задачи, которую мы рассмотрим в п. 3. В § 28 мы показали, что все решения внутренней второй краевой задачи с заданной функцией $f$ могут отличаться между собой только постоянными слагаемыми.

*Необходимым условием существования решения внутренней второй краевой задачи является следующее условие: интеграл от $f$ по границе области $G$ должен быть равен нулю.*

Мы докажем необходимость этого условия, предполагая, что $u(x, y)$ имеет внутри $G$ ограниченные непрерывные производные второго порядка, а $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ имеют непрерывное продолжение на границу $G$. В § 35 мы освободимся от этих ограничений. В том же параграфе мы докажем существование решения второй краевой задачи, если выполнено сформулированное выше необходимое условие.

Пусть $u(x, y)$ — решение второй краевой задачи в области $G$ и $\frac{\partial u}{\partial n}=f(s)$ на $\Gamma$. Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy.$$

Он равен нулю, так как функция $u$ гармонична. Преобразуя этот интеграл в интеграл по границе $\Gamma$ области $G$ согласно формуле Остроградского, получим, что должно быть

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \quad \text{или} \quad \int_{\Gamma} f(s)\, ds = 0, \tag{1,33}$$

так как, по предположению, на границе области $\frac{\partial u}{\partial n} = f(s)$. Если область $G$ многосвязна и ее граница состоит из конечного числа замкнутых линий, то интеграл в равенстве (1,33) должен быть взят по всем этим линиям, причем положительное направление обхода на каждой линии выбирается так, чтобы область $G$ оставалась по левую сторону от границы.

В трехмерном случае применимы те же рассуждения. Точно так же получим, что должен быть равен нулю интеграл по границе $G$ от заданных на этой границе значений $\frac{\partial u}{\partial n}$.

2. Для двумерной односвязной области $G$ внутренняя вторая краевая задача легко сводится к внутренней задаче Дирихле следующим образом. Допустим, что существует решение $u$ внутренней второй краевой задачи, имеющее вместе со своими первыми производными непрерывное продолжение на $\overline{G}$. Построим тогда в $\overline{G}$ функцию $v$ так, чтобы внутри $G$ удовлетворялись уравнения Коши-Римана

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{2,33}$$

Функция $v$, имеющая производные, определяемые этими уравнениями, существует, так как выполнено условие

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Она определяется этими уравнениями с точностью до постоянного слагаемого. Легко проверить, что в каждой точке $G$ производная от $u$ по какому-нибудь направлению $\vec{l}$ равна производной от $v$ по направлению, полученному поворотом $\vec{l}$ на 90° против часовой стрелки. Точно так же можно проверить, что производная от $u$ на границе $G$ по нормали к границе равна производной от $v$ по касательной к границе. Поэтому, фиксировав значение $v$ в какой-нибудь граничной точке $A$ области, мы найдем, что во всякой точке $B$ на границе $G$

$$v(B) - v(A) = \int_A^B f(s)\,ds, \tag{3,33}$$

где $ds$ означает элемент длины границы $G$. Так как интеграл от $f(s)$ по всей границе $G$ равен нулю, то равенство (3,33) определяет $v$ на границе $G$ как всюду непрерывную и однозначную функцию.

Легко видеть, что если $u$ гармонична, то $v$, определенная уравнениями (2,33), также гармонична. Поэтому, зная значения $v$ на границе $G$, мы можем единственным образом определить $v$ внутри $G$. Таким образом, предполагая, что для данной функции $f(s)$ существует в области $G$ решение $u(x, y)$ внутренней второй краевой задачи, имеющее вместе со своими первыми производными непрерывное продолжение на $G + \Gamma$, мы можем определить $u(x, y)$ с точностью до постоянного слагаемого из уравнений (2,33), построив соответствующее решение задачи Дирихле $v(x, y)$.

В случае трехмерной области аналогичные построения невозможны.

**3.** Внешняя вторая краевая задача состоит в следующем. *Пусть дана некоторая ограниченная односвязная область $G$ с гладкой границей $\Gamma$. Пусть точки, не принадлежащие $G + \Gamma$, образуют область $H$ с границей $\Gamma$. Требуется найти гармоническую функцию в $H$, непрерывную в $H + \Gamma$, у которой производная по направлению внешней (по отношению к $H$) нормали в каждой точке границы $H$ равна значению в этой точке заданной функции $f$.* При этом мы будем требовать еще, чтобы решение $u(P)$ внешней второй краевой задачи было ограниченным в случае двух независимых переменных и стремилось к нулю при стремлении точки $P$ к бесконечности в случае трех и большего числа независимых переменных.

В случае двух независимых переменных внешняя вторая краевая задача сводится к внутренней второй краевой задаче преобразованием обратными радиусами-векторами. При этом очень существенно то, что в силу конформности преобразования обратными радиусами-векторами углы сохраняются. Поэтому нормаль к границе прежней области переходит в линию, нормальную к границе новой области. Граничная функция для возникающей таким образом внутренней второй краевой задачи получается в случае двумерной области следующим образом. Сохраняя те обозначения, которыми мы пользовались при рассмотрении внешней задачи Дирихле, будем иметь

$$u^*(P^*) = u(P), \quad OP \cdot OP^* = R^2,$$

$$f^*(s^*) = \frac{\partial u^*}{\partial n^*} = \frac{\partial u}{\partial n} \frac{dn}{dn^*} = f(s) \frac{dn}{dn^*}.$$

Здесь через $s$ и $s^*$ обозначены соответствующие точки границ прежней и новой областей, через $n$ и $n^*$ — нормали к их границам, $\frac{dn}{dn^*}$ — коэффициент растяжения в точке границы по направлению нормали. Так как при конформном преобразовании коэффициент растяжения в данной точке не зависит от направления, то для вычисления $\frac{dn}{dn^*}$ можно предположить, что направления $n$ и $n^*$ проходят через центр $O$ преобразования. Тогда

$$\frac{dn}{dn^*} = \frac{d(OP)}{d(OP^*)} = -\frac{R^2}{(OP^*)^2}.$$

Чтобы рассматриваемая внешняя вторая краевая задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ей внутренняя вторая краевая задача имела решение. А для этого, как будет показано в § 35, необходимо и достаточно, чтобы

$$0 = \int_{L^*} f^*(s^*)\, ds^* = \int_L f(s) \frac{dn}{dn^*} \frac{ds^*}{ds}\, ds = \int_L f(s)\, ds. \quad (4,33)$$

Здесь через $L^*$ мы обозначили линию, в которую переходит $L$ после преобразования обратными радиусами-векторами. В силу конформности этого преобразования

$$\frac{dn}{dn^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = 1.$$

Таким образом, сводя внешнюю вторую краевую задачу к внутренней и пользуясь теоремой об устранимой особенности, получим, что в случае двух независимых переменных решения одной и той же внешней второй краевой задачи могут отличаться между собой только постоянными слагаемыми, и условие (1,33) является необходимым и достаточным условием существования решения внешней второй краевой задачи.

В случае трех независимых переменных с помощью преобразования обратными радиусами-векторами нельзя свести внешнюю вторую краевую задачу к внутренней, так как в этом случае $\frac{\partial u^*}{\partial n^*}$ на границе выражается не только через $\frac{\partial u}{\partial n}$, но и через значения самой неизвестной функции $u$ на $\Gamma$.

В случае трех и большего числа независимых переменных легко доказать единственность решения внешней второй краевой задачи в классе функций, стремящихся к нулю при стремлении точки $P$ к бесконечности (при этом стремление к нулю понимается в том смысле, что $|u(P)| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, если расстояние точки $P$ от начала координат достаточно велико). Будем предполагать, что граница $\Gamma$ области $H$ такова, что каждой точки границы можно коснуться шаром, принадлежащим области $H$.

Пусть $u(P)$ — гармоническая функция, непрерывная в $H+\Gamma$, $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ на $\Gamma$ и $u(P)\to 0$ при $P\to\infty$. Покажем, что $u\equiv 0$.

Рассмотрим область, ограниченную $\Gamma$ и сферой столь большого радиуса, что на этой сфере $|u(P)|<\varepsilon$. Так как $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ на границе $\Gamma$, то из теоремы 1 § 28 и теоремы о максимуме и минимуме гармонических функций следует, что функция $u(P)$ принимает наибольшее и наименьшее значения на поверхности сферы, т. е. во всей рассматриваемой области $|u(P)|<\varepsilon$. Так как $\varepsilon>0$ можно брать произвольно малым, то $u(P)=0$ в каждой точке $P$ области $H$, что и требовалось доказать.

## § 34. Теория потенциала

**1.** В ближайших двух параграфах мы получим решение основных краевых задач для уравнения Лапласа, а также для уравнения Пуассона (см. § 1), методом интегральных уравнений. Этот метод основан на представлении решений в виде интегралов, часто встречающихся в механике и фи-