решения одной и той же внешней второй краевой задачи могут отличаться между собой только постоянными слагаемыми, и условие (1,33) является необходимым и достаточным условием существования решения внешней второй краевой задачи.

В случае трех независимых переменных с помощью преобразования обратными радиусами-векторами нельзя свести внешнюю вторую краевую задачу к внутренней, так как в этом случае $\frac{\partial u^*}{\partial n^*}$ на границе выражается не только через $\frac{\partial u}{\partial n}$, но и через значения самой неизвестной функции u на Γ.

В случае трех и большего числа независимых переменных легко доказать единственность решения внешней второй краевой задачи в классе функций, стремящихся к нулю при стремлении точки P к бесконечности (при этом стремление к нулю понимается в том смысле, что $|u(P)| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, если расстояние точки P от начала координат достаточно велико). Будем предполагать, что граница Γ области H такова, что каждой точки границы можно коснуться шаром, принадлежащим области H.

Пусть $u(P)$ — гармоническая функция, непрерывная в $H+\Gamma$, $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ на Γ и $u(P)\to 0$ при $P\to\infty$. Покажем, что $u\equiv 0$.

Рассмотрим область, ограниченную Γ и сферой столь большого радиуса, что на этой сфере $|u(P)|<\varepsilon$. Так как $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ на границе Γ, то из теоремы 1 § 28 и теоремы о максимуме и минимуме гармонических функций следует, что функция $u(P)$ принимает наибольшее и наименьшее значения на поверхности сферы, т. е. во всей рассматриваемой области $|u(P)|<\varepsilon$. Так как $\varepsilon>0$ можно брать произвольно малым, то $u(P)=0$ в каждой точке P области H, что и требовалось доказать.

§ 34. Теория потенциала

1. В ближайших двух параграфах мы получим решение основных краевых задач для уравнения Лапласа, а также для уравнения Пуассона (см. § 1), методом интегральных уравнений. Этот метод основан на представлении решений в виде интегралов, часто встречающихся в механике и физике и заимствовавших оттуда название потенциалов. Эти потенциалы строятся с помощью специальных частных решений, имеющих в переменной точке особенность определенного типа.

Пусть в некоторой точке O пространства (x, y, z) помещен точечный электрический заряд q. Тогда, по известному закону физики, этот заряд создает электростатическое поле, напряженность которого $\boldsymbol{E}$ в любой точке Q, отличной от точки O, равна

$$\boldsymbol{E} = kq\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

или, в проекциях,

$$E_x = kq\frac{x-a}{r^3}; \quad E_y = kq\frac{y-b}{r^3}; \quad E_z = kq\frac{z-c}{r^3}. \quad (1{,}34)$$

Здесь a, b, c — координаты точки O; x, y, z — координаты Q, $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OQ}$, $r = OQ$, а коэффициент пропорциональности k зависит от выбранной системы единиц.

Правые части (1,34) равны с противоположным знаком частным производным от функции

$$u(Q) = kq\frac{1}{r} + \text{const} \qquad (2{,}34)$$

соответственно по x, y и z. Эта функция называется *потенциалом* данного электростатического поля. Обычно принято считать произвольную постоянную, стоящую в правой части (2,34), равной нулю, чтобы $u(Q) \to 0$ при удалении Q в бесконечность. Кроме того, в математических работах принято для простоты полагать $k = 1$. Таким образом, мы будем считать, что точечный заряд величины q создает потенциал

$$u(Q) = \frac{q}{r} = \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}. \qquad (3{,}34)$$

Так как при наличии нескольких точечных зарядов потенциалы, создаваемые ими, складываются, то потенциалы, создаваемые непрерывно распределенными зарядами, находятся в виде предела суммы, т. е. в виде интеграла. В частности, если заряд распределен по поверхности S с поверхностной плотностью $\omega(A)$ (где $A \in S$), то потенциал, создаваемый этим зарядом, равен

$$u(Q) = \iint\limits_S \frac{\omega(A)}{r(A, Q)}\, dS_A. \qquad (4,34)$$

Здесь $r(A, Q)$ есть расстояние от A до Q, A — переменная точка интегрирования, что подчеркивается индексом у дифференциала. Если заряд распределен по объему V с объемной плотностью $\rho(A)$ ($A \in V$), то потенциал, создаваемый этим зарядом, равен

$$u(Q) = \iiint\limits_V \frac{\rho(A)}{r(A, Q)}\, dV_A. \qquad (5,34)$$

Правая часть (4,34) называется потенциалом простого слоя, а правая часть (5,34) — объемным потенциалом. Необходимые предположения, обеспечивающие существование этих интегралов, будут указаны в дальнейшем.

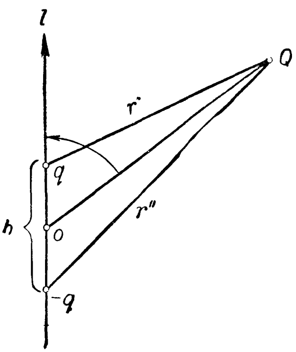

Рис. 12.

Представим теперь себе, что два заряда q и $-q$, находясь на оси l (рис. 12) на расстоянии $h > 0$, стремятся к точке O, причем направление от $-q$ к q все время совпадает с положительным направлением оси. Тогда потенциал в любой точке, кроме O, является разностью двух величин, стремящихся стать равными друг другу; поэтому рассматриваемый потенциал стремится к нулю. Если же в процессе движения q меняется так, что

$$qh = p = \text{const},$$

то предел потенциала равен

$$u(Q) = \lim q\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right) = p\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial l} = -\frac{p}{r^2}\frac{\partial r}{\partial l} =$$
$$= p\,\frac{\cos(\overrightarrow{OQ}, l)}{r^2}. \qquad (6,34)$$

Предельное расположение зарядов в физике называют *диполем*, величину p — *моментом*, а ось l — *осью* этого *диполя*. При помощи точечных зарядов диполь может быть осуществлен лишь приближенно (два больших заряда на малом расстоянии друг от друга). При исследовании электростатических полей удобно пользоваться полем диполя, как простейшим, наряду с полем точечного заряда.

Пусть теперь дана ориентированная поверхность S, т. е. такая, на которой указаны внешняя и внутренняя стороны. Пусть на S распределен диполь с плотностью момента $\tau(A)$ $(A \in S)$, причем в каждой точке A направление оси диполя совпадает с направлением внешней нормали к S в точке A. Тогда потенциал, создаваемый этим диполем, равен.

$$u(Q) = \iint\limits_S \frac{\tau(A)\cos(\overrightarrow{AQ},\ n_A)}{[r(A,\ Q)]^2}\, dS_A, \qquad (4{,}34^*)$$

где n_A — внешняя нормаль к S в A. Этот интеграл называется *потенциалом двойного слоя*, так как рассматриваемое распределение диполя может быть приближенно осуществлено, как два наложенных на S распределения зарядов с плотностью $\frac{1}{h}\tau(A)$ и $-\frac{1}{h}\tau(A)$ на расстоянии h (по нормали к S) друг от друга, если только $h > 0$ достаточно мало.

Правые части (3,34) и (6,34) являются гармоническими функциями в пространстве всюду, кроме точки O. В этом можно убедиться прямым вычислением (достаточно проверить гармоничность (3,34), так как тогда (6,34) в окрестности каждой точки, отличной от O, получится в качестве равномерного предела гармонических функций). Отсюда при небольших предположениях относительно плотности легко следует гармоничность потенциалов простого и двойного слоя всюду вне S.

Задача. Найдите потенциал простого слоя от равномерно распределенного заряда на поверхности сферы; найдите объемный потенциал от заряда, распределенного равномерно по объему шара.

2. Пусть распределение зарядов в пространстве постоянно по z. Тогда и электростатическое поле не зависит от z. В этом случае всю картину распределения зарядов и потенциалов достаточно рассматривать в какой-либо одной из плоскостей $z=\mathrm{const}$. Пусть x и y — координаты в этой плоскости. Вместо напряженности от точечного заряда здесь надо рассматривать напряженность в точке $Q(x, y)$ от заряда постоянной линейной плотности q, равномерно распределенного по прямой $x=a$, $y=b$. Обозначим точку (a, b) буквой O. Из соображений симметрии следует, что при $Q\neq 0$ искомая напряженность равна

$$\boldsymbol{E}=qf(r)\boldsymbol{r}, \tag{7,34}$$

где $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OQ}$, $r=|\boldsymbol{r}|$. Для вычисления $f(r)$ за точку O примем точку $(0,0)$ и за Q точку $(r,0)$. Тогда

$$E_y=E_z=0,\qquad E_x=k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rq}{(r^2+z^2)^{3/2}}\,dz=\frac{kq}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=\frac{2kq}{r}$$

$$(z=r\operatorname{tg}\varphi).$$

Поэтому (7,34) даст

$$f(r)=\frac{2k}{r^2},$$

откуда

$$\boldsymbol{E}=\frac{2kq}{r^2}\boldsymbol{r}$$

и, следовательно, при любом расположении точки Q в плоскости (x, y)

$$E_x=\frac{2kq}{r^2}(x-a),\qquad E_y=\frac{2kq}{r^2}(y-b).$$

Эти величины равны, с противоположным знаком, частным производным от функции, называемой логарифмическим потенциалом или просто потенциалом,

$$u(Q)=2kq\ln\frac{1}{r}+\mathrm{const} \tag{8,34}$$

соответственно по x и y. В математических работах принято брать $2k=1$, $\mathrm{const}=0$. Таким образом, в случае плоского поля точечный заряд создает в плоскости потенциал

$$u(Q) = q \ln \frac{1}{r(O, Q)} = q \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}. \qquad (9,34)$$

Отметим, что этот потенциал нельзя было найти из (3,34) непосредственным интегрированием по заряженной линии, так как тогда получился бы расходящийся интеграл.

Потенциал от диполя на плоскости определяется, аналогично п. 1, по формуле

$$u(Q) = p \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial l} = p \frac{\cos(\overrightarrow{OQ}, l)}{r}. \qquad (10,34)$$

Правые части (9,34) и (10,34) являются гармоническими функциями на плоскости всюду, кроме O (ср. п. 1).

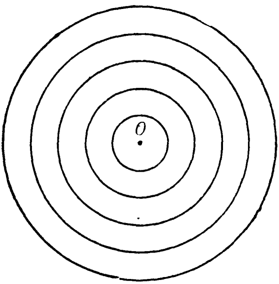

Рис. 13.

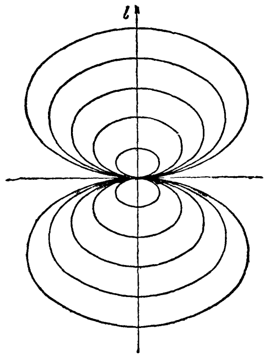

Рис. 14.

Линии уровня этих функций (эквипотенциальные линии) имеют вид, изображенный на рис. 13 (для точечного заряда) и рис. 14 (для точечного диполя).

Соответственно (9,34) и (10,34) напишутся выражения для потенциалов от распределенного заряда и диполя. Вместо объемного потенциала здесь будет двумерный потенциал

$$u(Q) = \iint_G \rho(A) \ln \frac{1}{r(A, Q)} dS_A, \qquad (11,34)$$

где G — область на плоскости. Потенциалы простого и двойного слоя для плоскости имеют вид соответственно

$$u(Q)=\int\limits_L \omega(A)\ln\frac{1}{r(A,\ Q)}\,dl_A, \tag{12,34}$$

$$u(Q)=\int\limits_L \tau(A)\frac{\cos(\overrightarrow{AQ},\ \boldsymbol{n}_A)}{r(A,\ Q)}\,dl_A. \tag{13,34}$$

Здесь L — линия на плоскости, $\boldsymbol{n}_A$ — вектор, направленный по нормали к L в точке A. Мы будем считать линию L ориентированной, т. е. такой, на которой указаны внешняя и внутренняя стороны. Нормаль $\boldsymbol{n}_A$ будем считать внешней.

В дальнейшем мы будем рассматривать только теорию потенциала на плоскости. Развитие этой теории в пространстве любого числа измерений проводится аналогично.

Задача. Вычислите потенциал простого слоя от заряда, равномерно распределенного на окружности. (Получающийся интеграл можно вычислить при помощи теории вычетов.)

3. В дальнейшем мы будем рассматривать плоскую линию L с непрерывно вращающейся касательной, не имеющую точек самопересечения. Тогда для любой точки $P\in L$ можно расположить оси координат x, y так, что P будет иметь координаты $x=0$, $y=0$ и часть L в достаточной близости от P представима в виде

$$y=\varphi(x)\quad(-h\leqslant x\leqslant h;\ h>0), \tag{14,34}$$

причем $\varphi'(x)$ существует и непрерывна.

Пусть функция $F(A,\ Q)$ определена и непрерывна по совокупности переменных, когда $A\in L$, а Q как угодно меняется на плоскости, не совпадая с точкой A, и не определена при $Q=A$. Тогда интеграл

$$w(Q)=\int\limits_L F(A,\ Q)\,dl_A \tag{15,34}$$

во всяком случае определен и является непрерывной функцией Q, когда Q меняется вне L; доказательство этого элементарно.

Если $Q=P$ находится на L, то интеграл (15,34) является несобственным, так как подынтегральная функция не определена при $A=P$. Мы будем тогда, как обычно, говорить о сходимости или расходимости интеграла (15,34) в зависимости от того, существует или не существует предел

$$\lim_{\substack{A'\to P\\ A''\to P}} \int\limits_{L-l} F(A, P)\,dl_A, \qquad (16{,}34)$$

где l — дуга L с концами A' и A'', содержащая внутри себя точку P (рис. 15).

Мы скажем, что *интеграл* (15,34) *равномерно сходится в точке* $P \in L$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такая окрестность* V *точки* P (см. рис. 15) *и такая дуга* l *кривой* L, *содержащая точку* P *строго внутри себя, что для любой точки* $Q \in V$ *интеграл*

$$\int\limits_{l} F(A, Q)\,dl_A \qquad (17{,}34)$$

сходится и по абсолютной величине $< \varepsilon$ (требование сходимости существенно, только если Q находится на общей части l и V).

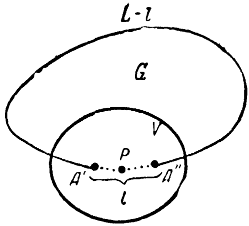

Рис. 15.

Теорема 1. *Пусть интеграл* (15,34) *равномерно сходится в некоторой точке* $P \in L$. *Тогда для всех точек* Q, *лежащих на* L *достаточно близко от* P, *интеграл* (15,34) *сходится и определяет функцию* $w(Q)$ *в некоторой окрестности точки* P. *Эта функция непрерывна в точке* P.

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и выделим окрестность V и дугу l согласно определению равномерной сходимости в точке. Тогда для любой точки Q, внутренней для дуги l и лежащей в V, интеграл (17,34) сходится. Поэтому и интеграл (15,34) для таких точек Q сходится, и первое утверждение теоремы (об определенности $w(Q)$ в некоторой окрестности P) доказано.

Чтобы убедиться в непрерывности $w(Q)$ в P, предположим, что Q находится в V. Тогда

$$|w(Q) - w(P)| = \left| \int\limits_{L} F(A, Q)\,dl_A - \int\limits_{L} F(A, P)\,dl_A \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{l} F(A, Q)\,dl_A \right| + \left| \int\limits_{l} F(A, P)\,dl_A \right| + \left| \int\limits_{L-l} [F(A, Q) - \right.$$

$$\left. - F(A, P)]\,dl_A \right| \leqslant 2\varepsilon + \int\limits_{L-l} |F(A, Q) - F(A, P)|\,dl_A.$$

Однако если l фиксировано, то последний интеграл становится меньше ε, если Q находится в достаточно малой окрестности точки P; это следует из равномерной непрерывности подынтегральной функции, когда A меняется по $L-l$, а Q — по указанной окрестности P. Таким образом, если Q находится достаточно близко от P, то

$$|w(Q)-w(P)|<3\varepsilon,$$

что, в силу произвольности ε, доказывает непрерывность функции $w(Q)$ при $Q=P$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если $\omega(A)$ и $\tau(A)$ — непрерывные функции, то потенциалы простого и двойного слоя* (12,34) *и* (13,34) *всюду вне L являются гармоническими функциями.*

Действительно, возможность дифференцировать функции (12,34) и (13,34) по координатам точки Q любое число раз, если Q не лежит на L, доказывается так же, как в математическом анализе доказывается возможность дифференцировать определенный интеграл по параметру, от которого зависит подынтегральная функция. Поэтому утверждение теоремы 2 сразу следует из гармоничности подынтегральных функций в (12,34) и (13,34).

Теорема 3. *Интеграл* (12,34), *если $\omega(A)$ — непрерывная функция на L, сходится, когда Q лежит на L. Таким образом, потенциал простого слоя является функцией, определенной на всей плоскости. Эта функция непрерывна в каждой точке плоскости.*

Действительно, в силу теорем 1 и 2, достаточно проверить равномерную сходимость интеграла (12,34) в любой точке $P\in L$. Для этого возьмем точку P за начало координат и, направив подходящим образом оси координат, запишем уравнение части L вблизи P в виде (14,34). Эту часть L мы обозначим l_h. Имеем

$$\left|\int_{l_h}\omega(A)\ln\frac{1}{r(A,\,Q)}\,dl_A\right|\leqslant\max_L|\omega(A)|\cdot\int_{l_h}|\ln r(A,\,Q)|\,dl_A=$$

$$=\max_L|\omega(A)|\int_{-h}^{h}\left|\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right|\sqrt{1+[\varphi'(a)]^2}\,da, \qquad (18,34)$$

где $b=\varphi(a)$.

Если V и h достаточно малы, то расстояние между любой точкой $Q(x, y)$ области V и любой точкой $A(a, b)$ линии l_h будет меньше 1, откуда

$$0 \leqslant |x-a| \leqslant \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < 1,$$

и оценка (18,34) дает тогда, если $Q \in V$,

$$\left|\int\limits_{l_h} \omega(A) \ln \frac{1}{r(A, Q)}\, dl_A\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_L |\omega(A)| \cdot \max_{l_h} \sqrt{1+[\varphi'(a)]^2} \int\limits_{-h}^{h} |\ln|x-a||\, da \leqslant$$

$$\leqslant \max_L |\omega(A)| \cdot \max_{l_h} \sqrt{1+[\varphi'(a)]^2} \cdot 2 \int\limits_0^{2h} |\ln a|\, da.$$

Правая часть последнего неравенства, как легко видеть, стремится к нулю при $h \to 0$ равномерно относительно точки Q, меняющейся в V. Теорема 3 доказана.

Замечание. Сходимость интеграла, стоящего в левой части (18,34) (при $Q \in l_h$), мы доказали одновременно с оценкой этого интеграла, так как несобственный интеграл всегда сходится, если он сходится абсолютно.

Будем в дальнейшем через G обозначать область, ограниченную замкнутой кривой L с непрерывно вращающейся касательной, а через H — область, состоящую из точек, не принадлежащих $G+L$.

Теорема 4. *Потенциал двойного слоя на L с единичной плотностью* (т. е. интеграл (13,34) при $\tau(A) \equiv 1$) *равен* -2π *при* $Q \in G$, *сходится и равен* $-\pi$ при $Q \in L$, *равен нулю при* $Q \in H$.

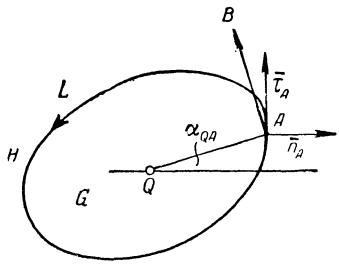

Рис. 16.

Действительно, пусть Q является внутренней точкой G, а A обходит L в положительном направлении (рис. 16). Обозначим через α_{QA} угол наклона вектора $\overrightarrow{QA}$ к оси x. Тогда, обозначив через $\overrightarrow{AB}$ вектор, полученный из $\overrightarrow{QA}$ поворотом на $+90°$, имеем:

$$\frac{d\alpha_{QA}}{dl}=\frac{\cos(\overrightarrow{AB},\ \tau_A)}{r(A,\ Q)}=\frac{\cos(\overrightarrow{QA},\ n_A)}{r(A,\ Q)}=-\frac{\cos(\overrightarrow{AQ},\ n_A)^{*)}}{r(A,\ Q)}.$$

Отсюда

$$\int\limits_L \frac{\cos(\overrightarrow{AQ},\ n_A)}{r(A,\ Q)}\,dl_A=-\int\limits_L d\alpha_{QA}=-2\pi.$$

Случаи $Q\in L$ и $Q\in H$ рассматриваются аналогично. Теорема 4 доказана.

Перейдем теперь к общему случаю.

Пусть дополнительно дано, что L — плоская замкнутая линия с непрерывно вращающейся касательной, состоящая из конечного числа выпуклых дуг и прямолинейных отрезков. Мы называем дугу выпуклой, если каждая прямая пересекает ее не больше, чем в двух точках. Пусть G — область, ограниченная кривой L. Выпуклость некоторых из дуг, составляющих L, может быть обращена к внутренности G, а некоторых — к внешности G.

Теорема 5. *Интеграл* (13,34) *сходится, когда* $Q\in L$, *если* $\tau(A)$ — *непрерывная функция на* L.

Таким образом, потенциал двойного слоя $u(Q)$ *определен формулой* (13,34) *всюду на плоскости. При этом он имеет на* L, *вообще говоря, разрыв первого рода. Более точно, в* $G+L$ *имеется непрерывная функция* $\underset{\sim}{u}(Q)$, *в* $H+L$ — *непрерывная функция* $\tilde{u}(Q)$, *причем*

$$\left.\begin{aligned} u(Q)&=\underset{\sim}{u}(Q), \text{ если } Q\in G,\\ u(Q)&=\tilde{u}(Q), \text{ если } Q\in H,\\ u(Q)&=\frac{\tilde{u}(Q)+\underset{\sim}{u}(Q)}{2}, \text{ если } Q\in L,\\ \tilde{u}(Q)-\underset{\sim}{u}(Q)&=2\pi\tau(Q), \text{ если } Q\in L. \end{aligned}\right\}\quad(19{,}34)$$

Доказательство. Возьмем любую точку $P\in L$ и рассмотрим наряду с потенциалом (13,34) другой потенциал

*) Это легко проверить, если заменить дифференциалы приращениями, а дугу Δl — касательной к ней в точке A.

двойного слоя

$$u_1(Q)=\int_L \tau(P)\frac{\cos(\overrightarrow{AQ},\ n_A)}{r(A,\ Q)}\,dl_A=\begin{cases}-2\pi\tau(P), & \text{если } Q\in G,\\ -\pi\tau(P), & \text{если } Q\in L,\\ 0, & \text{если } Q\in H.\end{cases}$$

Составим разность

$$u(Q)-u_1(Q)=\int_L[\tau(A)-\tau(P)]\frac{\cos(\overrightarrow{AQ},\ n_A)}{r(A,\ Q)}\,dl_A \quad (20{,}34)$$

и докажем, что интеграл справа равномерно сходится в точке $Q=P$. Отсюда, в силу теоремы 1, будет следовать, что $u(Q)$ при $Q=P$ имеет разрыв того же вида, что и $u_1(Q)$. Это означает, что $u(Q)$ имеет пределы при $Q\to P$ по G и при $Q\to P$ по H; само значение $u(P)$ существует и равно среднему арифметическому этих предельных значений, а скачок функции $u(Q)$ в P при переходе из G в H равен $2\pi\tau(P)$. Функция $u(Q)$, рассматриваемая при $Q\in G$ и продолженная на L своими предельными значениями, дает функцию $u(Q)$, непрерывную в $G+L$; аналогично для $Q\in H$. Этого достаточно для доказательства теоремы 5.

Для того чтобы убедиться в равномерной сходимости интеграла (20,34) в точке P, возьмем дугу l_h, как при доказательстве теоремы 3, и оценим интеграл вида (20,34), взятый по l_h. Получим

$$\left|\int_{l_h}[\tau(A)-\tau(P)]\frac{\cos(\overrightarrow{AQ},n_A)}{r(A,Q)}\,dl_A\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{l_h}|\tau(A)-\tau(P)|\int_{l_h}\left|\frac{\cos(\overrightarrow{AQ},n_A)}{r(A,Q)}\right|dl_A.$$

Мы можем считать дугу l_h настолько малой, что она составлена не более чем из двух выпуклых дуг или прямолинейных отрезков. Легко видеть, что выражение $|\cos(\overrightarrow{AQ},n_A)|\,dl_A$ равно проекции элемента дуги dl_A на касательную в точке A к окружности радиуса $r(A,Q)$ с центром в точке Q, а $\left|\frac{\cos(\overrightarrow{AQ},n_A)}{r(A,Q)}\right|dl_A$ — углу, под которым виден из точки Q элемент dl_A.

Очевидно, что для любой выпуклой дуги l, которую всякий луч, выходящий из точки Q, пересекает не более чем в одной точке, а также для любого прямолинейного отрезка справедливо неравенство

$$\int_{l} \left| \frac{\cos (\overrightarrow{AQ}, n_A)}{r(A, Q)} \right| dl_A \leqslant 2\pi.$$

Всякую выпуклую дугу l можно разбить на две части — l_1 и l_2, каждую из которых всякий луч, выходящий из точки Q, будет пересекать не более чем в одной точке. Так как дуга l_h состоит не более чем из четырех дуг (или отрезков), обладающих этим свойством, то

$$\int_{l_h} \left| \frac{\cos (\overrightarrow{AQ}, n_A)}{r(A, Q)} \right| dl_A \leqslant 8\pi$$

и, следовательно,

$$\max_{l_h} |\tau(A) - \tau(P)| \int_{l_h} \left| \frac{\cos (\overrightarrow{AQ}, n_A)}{r(A, Q)} \right| dl_A \leqslant \max_{l_h} |\tau(A) - \tau(P)| \cdot 8\pi.$$

Если h стремится к нулю, то, ввиду непрерывности $\tau(A)$, выражение $\max\limits_{l_h} |\tau(A) - \tau(P)| \cdot 8\pi$ стремится к нулю равномерно для всех Q. Теорема 5 доказана.

Рассмотрим нормальную производную от потенциала простого слоя. Пусть $P \in L$ и какая-нибудь функция $F(Q)$ определена в некоторой окрестности P. Тогда мы обозначим

$$\frac{\partial F(P)}{\partial n^+} = \lim_{P' \to P} \frac{F(P') - F(P)}{r(P', P)},$$

$$\frac{\partial F(P)}{\partial n^-} = \lim_{P'' \to P} \frac{F(P) - F(P'')}{r(P, P'')}.$$

Здесь n — нормаль к линии L, проведенная через точку P; n^+ — ее внешняя часть по отношению к G, n^- — ее внутренняя часть. Положительным направлением нормали мы будем считать ее направление n на внешнюю часть плоскости по отношению к G. Точка $P' \in H$, точка $P'' \in G$.

Мы будем предполагать, что L удовлетворяет всем тем условиям, которые были сформулированы на стр. 290, и, кроме того, имеет ограниченную кривизну. Тогда справедлива следующая

Теорема 6. *Потенциал простого слоя* $u(Q)$, *определенный формулой* (12,34), *имеет в любой точке* $P \in L$ *производные* $\frac{\partial u(P)}{\partial n^+}$ и $\frac{\partial u(P)}{\partial n^-}$. *При этом*

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n^+} = -\int_L \omega(A) \frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_P)}{r(A, P)} dl_A - \pi\omega(P), \tag{21,34}$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n^-} = -\int_L \omega(A) \frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_P)}{r(A, P)} dl_A + \pi\omega(P). \tag{22,34}$$

Интегралы, стоящие в правых частях (21,34) *и* (22,34), *сходятся. Предполагается, что* $\omega(A)$ — *непрерывная функция на* L.

Доказательство. Если Q лежит на n_p, но не лежит на L, то производная от $u(Q)$ по направлению n_p существует и определяется при помощи дифференцирования интеграла (12,34) по параметру:

$$\frac{\partial u(Q)}{\partial n_P} = -\int_L \omega(A) \frac{\partial \ln r(A, Q)}{\partial n_P} dl_A = -$$
$$-\int_L \omega(A) \frac{\cos(\overrightarrow{AQ}, n_P)}{r(A, Q)} dl_A. \tag{23,34}$$

Рассмотрим потенциал двойного слоя $u_1(Q)$, полученный от распределения диполя по L с плотностью $\omega(A)$. Тогда, если Q не лежит на L, то

$$\frac{\partial u(Q)}{\partial n_P} + u_1(Q) = \int_L \omega(A) \frac{\cos(\overrightarrow{AQ}, n_A) - \cos(\overrightarrow{AQ}, n_P)}{r(A, Q)} dl_A. \tag{24,34}$$

Докажем, что полученный интеграл равномерно сходится в точке P, если Q находится на n_p. Конечно, при этом определение равномерной сходимости в точке P (см. п. 3) надо несколько изменить, а именно требовать, чтобы точка Q лежала не где угодно в V, а на пересечении n_p с окрестностью V точки P. Однако теорема 1 при этом сохранится, если в ее формулировке всюду требовать, чтобы точка Q находилась на n_p.

Пусть l — малый кусок L около точки P. Тогда, если $\max|\omega(A)| = C$, то

$$\left|\int_l \omega(A) \frac{\cos(\overrightarrow{AQ}, n_A) - \cos(\overrightarrow{AQ}, n_P)}{r(A, Q)} dl_A\right| \leqslant$$

$$\leqslant C \int_l \frac{|\cos(\overrightarrow{AQ}, n_A) - \cos(\overrightarrow{AQ}, n_P)|}{r(A, Q)} dl_A \leqslant$$

$$\leqslant 2C \int_l \frac{\left|\sin\frac{(\overrightarrow{AQ}, n_P) - (\overrightarrow{AQ}, n_A)}{2}\right|}{r(A, Q)} dl_A =$$

$$= 2C \int_l \frac{\left|\sin\frac{(n_A, n_P)}{2}\right|}{r(A, Q)} dl_A \leqslant C \int_l \frac{|(n_A, n_P)|}{r(A, Q)} dl_A {}^{*)}. \qquad (25,34)$$

Мы предполагаем, что линия L имеет ограниченную кривизну $\chi(A)$. Поэтому

$$|(n_A, n_P)| = \left|\int_{\smile AP} \chi(A)\, dl_A\right| < C_1 |\overset{\smile}{AP}|$$

и левая часть (25,34) будет не больше

$$CC_1 \int_l \frac{|\overset{\smile}{AP}|}{r(A, Q)} dl_A. \qquad (26,34)$$

Если дуга l достаточно мала, то при $A \neq P$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < |\sin(\overrightarrow{AP}, n_P)| < 1$$

и

$$r(A, P) > \frac{1}{2}|\overset{\smile}{AP}|.$$

Тогда, если обозначить через A' проекцию точки A на n_P

---

*) Здесь мы воспользовались тем, что для любых α и β $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$.

(рис. 17), то

$$r(A, Q) \geqslant r(A, A') > \frac{1}{\sqrt{2}} r(A, P) > \frac{1}{2\sqrt{2}} |\breve{AP}|$$

и оценка (26,34) показывает, что левая часть (25,34) будет меньше $CC_1 2\sqrt{2} \int\limits_l dl = 2\sqrt{2} CC_1 |l|$. Отсюда видно, что левая часть (25,34) стремится к нулю при $l \to 0$ равномерно для всех Q, лежащих на n_P. Таким образом, равномерная сходимость интеграла (24,34) доказана.

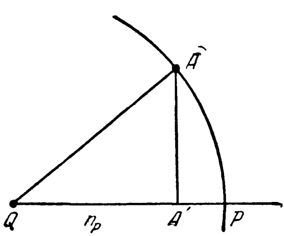

Рис. 17.

Из равномерной сходимости интеграла (24,34) в точке P следует в силу теоремы 1 (соответственно измененной, так как Q лежит в пересечении V с n_P), что интеграл имеет смысл (сходится), если $Q = P$, и имеет предел, когда $Q \to P$ по прямой n_P. Этот предел равен значению интеграла (24,34) при $Q = P$. Иначе говоря,

$$\lim_{P' \to P} \left[\frac{\partial u(P')}{\partial n_P} + u_1(P')\right] = \lim_{P'' \to P} \left[\frac{\partial u(P'')}{\partial n_P} + u_1(P'')\right] =$$
$$= \int\limits_L \omega(A) \frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_A) - \cos(\overrightarrow{AP}, n_P)}{r(A, P)} dl_A. \qquad (27,34)$$

Однако в левой части (24,34) характер разрыва второго слагаемого определяется теоремой 5:

$$\lim_{P' \to P} u_1(P') = \hat{u}_1(P) = \int\limits_L \omega(A) \frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_A)}{r(A, P)} dl_A + \pi\omega(P),$$

$$\lim_{P'' \to P} u_1(P'') = \underline{u}_1(P) = \int\limits_L \omega(A) \frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_A)}{r(A, P)} dl_A - \pi\omega(P).$$

Отсюда и из (27,34) следует, что пределы и интеграл

$$\lim_{P' \to P} \frac{\partial u(P')}{\partial n_P}, \quad \lim_{P'' \to P} \frac{\partial u(P'')}{\partial n_P}, \qquad \int\limits_l \omega(A) \frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_P)}{r(A, P)} dl_A$$

существуют, причем

$$\left.\begin{aligned} \lim_{P' \to P} \frac{\partial u(P')}{\partial n_P} &= -\int_L \omega(A) \frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_P)}{r(A, P)} dl_A - \pi\omega(P), \\ \lim_{P'' \to P} \frac{\partial u(P'')}{\partial n_P} &= -\int_L \omega(A) \frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_P)}{r(A, P)} dl_A + \pi\omega(P). \end{aligned}\right\} \quad (28,34)$$

При помощи теоремы о конечных приращениях нетрудно убедиться в том, что если на каком-нибудь отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ дана непрерывная функция $f(x)$, причем $f'(x)$ существует при $a < x < b$ и

$$\lim_{\substack{x \to a \\ (x > a)}} f'(x) \qquad (29,34)$$

существует, то производная $f'(a)$ существует и равна (29,34); конечно, под $f'(a)$ надо понимать правую производную от $f(x)$, т. е.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Поэтому из предыдущего вытекает, что $\frac{\partial u(P)}{\partial n^+}$ и $\frac{\partial u(P)}{\partial n^-}$ существуют, причем

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n^+} = \lim_{P' \to P} \frac{\partial u(P')}{\partial n_P}, \quad \frac{\partial u(P)}{\partial n^-} = \lim_{P'' \to P} \frac{\partial u(P'')}{\partial n_P}.$$

Отсюда и из (28,34) следуют формулы (21,34) и (22,34). Теорема 6 доказана.

Задача 1. Докажите теоремы, аналогичные теоремам 5 и 6, для случая, когда L — незамкнутая линия с непрерывно вращающейся касательной, составленная из конечного числа выпуклых дуг, имеющих ограниченную кривизну.

Задача 2. Перенесите теоремы 3, 4, 5 на тот случай, когда G есть многоугольник.

Замечания. 1. Все доказанные в настоящем параграфе теоремы о потенциалах простого и двойного слоя остаются справедливыми, если предполагать только, что линия L всюду имеет ограниченную кривизну.

2. Все доказанные в настоящем параграфе теоремы естественно переносятся на потенциалы простого и двойного слоя в трехмерном пространстве, если предположить, что поверхность S, по которой берутся интегралы, соответствующие (4,34) (потенциал простого слоя) и (4,34 *) (потенциал двойного слоя), имеет всюду ограниченную кривизну. При этом оказывается, что потенциал простого слоя всюду непрерывен, а потенциал двойного слоя и нормальные производные потенциала простого слоя около точки Q заряженной поверхности имеют скачки $4\pi\tau(Q)$, соответственно $4\pi\omega(Q)$, вместо $2\pi\tau(Q)$, соответственно $2\pi\omega(Q)$, в случае плоскости. Здесь $\omega(Q)$, соответственно $\tau(Q)$, означают плотность распределения зарядов, соответственно диполей, на поверхности S. Предполагается, что эти плотности непрерывны. Совершенно так же переносятся на трехмерное пространство все рассуждения следующего параграфа. Доказательство этих утверждений можно найти, например, в книге С. Л. Соболева «Уравнения математической физики», Гостехиздат, 1954, стр. 208—228.

§ 35. Решение краевых задач с помощью потенциалов

1. Сведение краевых задач для гармонических функций к интегральным уравнениям. Пусть L — плоская замкнутая линия с непрерывно вращающейся касательной и непрерывной кривизной, состоящая из конечного числа выпуклых дуг и прямолинейных отрезков *).

Пусть на L задана непрерывная функция $f(P)$. Будем решать внутреннюю задачу Дирихле, состоящую, как было указано в § 27, в разыскании функции $u(Q)$, непрерывной в $G+L$ и гармонической в G, причем на L должно быть

$$u(P)=f(P). \qquad (1,35)$$

*) Кривизну $\chi(A)$ в точке A кривой L мы будем рассматривать со знаком, определяемым положительным направлением обхода L, т. е.

$$\chi(A)=\frac{d\alpha}{dl},$$

где α — угол, образованный положительным направлением касательной и осью Ox. Направление обхода L мы будем считать положительным, если при обходе L в этом направлении область G остается слева.