2. Все доказанные в настоящем параграфе теоремы естественно переносятся на потенциалы простого и двойного слоя в трехмерном пространстве, если предположить, что поверхность S, по которой берутся интегралы, соответствующие (4,34) (потенциал простого слоя) и (4,34 *) (потенциал двойного слоя), имеет всюду ограниченную кривизну. При этом оказывается, что потенциал простого слоя всюду непрерывен, а потенциал двойного слоя и нормальные производные потенциала простого слоя около точки Q заряженной поверхности имеют скачки $4\pi\tau(Q)$, соответственно $4\pi\omega(Q)$, вместо $2\pi\tau(Q)$, соответственно $2\pi\omega(Q)$, в случае плоскости. Здесь $\omega(Q)$, соответственно $\tau(Q)$, означают плотность распределения зарядов, соответственно диполей, на поверхности S. Предполагается, что эти плотности непрерывны. Совершенно так же переносятся на трехмерное пространство все рассуждения следующего параграфа. Доказательство этих утверждений можно найти, например, в книге С. Л. Соболева «Уравнения математической физики», Гостехиздат, 1954, стр. 208—228.

§ 35. Решение краевых задач с помощью потенциалов

1. Сведение краевых задач для гармонических функций к интегральным уравнениям. Пусть L — плоская замкнутая линия с непрерывно вращающейся касательной и непрерывной кривизной, состоящая из конечного числа выпуклых дуг и прямолинейных отрезков *).

Пусть на L задана непрерывная функция $f(P)$. Будем решать внутреннюю задачу Дирихле, состоящую, как было указано в § 27, в разыскании функции $u(Q)$, непрерывной в $G+L$ и гармонической в G, причем на L должно быть

$$u(P)=f(P). \tag{1,35}$$

*) Кривизну $\chi(A)$ в точке A кривой L мы будем рассматривать со знаком, определяемым положительным направлением обхода L, т. е.

$$\chi(A)=\frac{d\alpha}{dl},$$

где α — угол, образованный положительным направлением касательной и осью Ox. Направление обхода L мы будем считать положительным, если при обходе L в этом направлении область G остается слева.

Мы будем искать эту гармоническую функцию в виде потенциала двойного слоя (13,34) с неизвестной непрерывной плотностью $\tau(A)$ распределения диполя на L. В силу теорем 2 и 5 § 34 этому распределению соответствует функция $\underset{\smile}{u}(Q)$, непрерывная в $G+L$ и гармоническая при $Q\in G$. Согласно (19,34) при $P\in L$ будет

$$\underset{\smile}{u}(P)=\int\limits_L \tau(A)\,\frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_A)}{r(A,P)}\,dl_A-\pi\tau(P).$$

Поэтому для выполнения краевого условия (1,35) необходимо и достаточно, чтобы функция $\tau(A)$ удовлетворяла интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\tau(P)=\frac{1}{\pi}\int\limits_L \tau(A)\,\frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_A)}{r(A,P)}\,dl_A-\frac{1}{\pi}f(P). \qquad (2,35)$$

Аналогично исследуется внешняя задача Дирихле см. (§ 32). Если искать решение в виде потенциала двойного слоя с неизвестной непрерывной плотностью $\tau(A)$ распределения диполя на L, то аналогично (2,35) мы получим для $\tau(A)$ уравнение

$$\tau(P)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_L \tau(A)\,\frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_A)}{r(A,P)}\,dl_A+\frac{1}{\pi}f(P), \qquad (3,35)$$

где $f(P)$ — заданная на L непрерывная функция.

Внутренняя вторая краевая задача, как было указано в § 27, состоит в том, чтобы найти функцию $u(Q)$, непрерывную в $G+L$ и гармоническую в G, обладающую в каждой точке L производной по направлению внешней нормали, равной заранее заданной непрерывной функции $f(P)$.

Так как через $\frac{\partial u}{\partial n^-}$ мы обозначили в § 34 производную по направлению внешней нормали, то для решения $u(P)$ второй краевой задачи

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n^-}=f(P) \quad (P\in L). \qquad (4,35)$$

Мы будем искать решение в виде потенциала простого слоя (12,34) с неизвестной функцией $\omega(A)$, которую будем считать непрерывной. В силу теоремы 6 § 34 для того, чтобы удовлетворить краевому условию (4,35), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\omega(P)=\frac{1}{\pi}\int_L \omega(A)\frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_P)}{r(A,P)}\,dl_A+\frac{1}{\pi}f(P). \tag{5,35}$$

Аналогично ставится внешняя вторая краевая задача. Она приводится к интегральному уравнению

$$\omega(P)=-\frac{1}{\pi}\int_L \omega(A)\frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_P)}{r(A,P)}\,dl_A+\frac{1}{\pi}f(P). \tag{6,35}$$

Замечание. Если бы мы пытались решить внутреннюю задачу Дирихле при помощи потенциала простого слоя с неизвестной непрерывной плотностью $\omega(A)$ распределения заряда, то пришли бы к уравнению

$$\int_L \omega(A)\ln\frac{1}{r(A,P)}\,dl_A=f(P)\qquad(P\in L). \tag{*}$$

Это — интегральное уравнение Фредгольма первого рода. Теория таких уравнений значительно сложней, чем теория уравнений второго рода. Уравнение (*), как можно показать, имеет решение не при всех непрерывных $f(P)$. Если, например, G есть круг радиуса 1, то при $f(P)>0$ не существует решения уравнения (*), так как левая часть (12,34) обращается в нуль в центре этого круга при любой функции $\omega(A)$; при $f(P)>0$ это невозможно вследствие теоремы о максимуме и минимуме.

2. Исследование полученных интегральных уравнений.

Обозначим

$$K_1(P, A)=\frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_A)}{r(A,P)}; \qquad K_2(P, A)=-\frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_P)}{r(A,P)}$$

$$(A\in L,\quad P\in L,\quad A\neq P).$$

Тогда

$$K_1(A, P)=K_2(P, A).$$

Поэтому ядра уравнений (2,35) и (6,35), а также (3,35) и (5,35) оказываются транспонированными.

Ядро $K_1(P, A)$ определено и непрерывно, когда $A \in L$, $P \in L$, $A \neq P$. Однако для любой точки $P_0 \in L$ ядро $K_1(P, A)$ имеет определенный предел, когда $A \to P_0$, $P \to P_0$ $(A \neq P)$. Пусть T_A — касательная в точке A к кривой L, P_A — проекция точки P на T_A. Тогда, если кривизна $\chi(P_0)$ положительна, то в достаточно малой окрестности P_0 $\cos(\overrightarrow{AP}, n_A) = -|\sin(\overrightarrow{AP}, T_A)|$. Учитывая эквивалентность $|\sin \overrightarrow{AP}, T_A)|$ и $|\operatorname{tg}(\overrightarrow{AP}, T_A)|$, $r(A, P)$ и $r(A, P_A)$, получим

$$\lim \frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_A)}{r(A, P)} = -\lim \frac{|\operatorname{tg}(\overrightarrow{AP}, T_A)|}{r(A, P_A)}. \qquad (7,35)$$

Выберем T_A за ось x, начало координат поместим в точку A, а ось y направим внутрь G. Тогда уравнение части L вблизи A запишется в виде $y = \varphi(x)$. Обозначим через $\bar{x}$ абсциссу точки P в построенной системе координат. Тогда, применяя формулу Тэйлора, получим

$$\frac{|\operatorname{tg}(\overrightarrow{AP}, T_A)|}{r(A, P_A)} = \frac{\varphi(\bar{x})}{\bar{x}^2} = \frac{1}{2}\varphi''(\theta\bar{x}) =$$

$$= \frac{1}{2}\chi(M)(1 + [\varphi'(\theta\bar{x})]^2)^{\frac{3}{2}}, \qquad (8,35)$$

где точка M (с абсциссой $\theta\bar{x}$) лежит на L между A и P, $\chi(M)$ — кривизна в точке M. Из (7,35) и (8,35) следует, что при $A \to P_0$, $P \to P_0$ $(A \neq P)$

$$\lim \frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_A)}{r(A, P)} = -\frac{1}{2}\chi(P_0).$$

Таким же образом можно показать, что последнее равенство справедливо и в том случае, когда $\chi(P_0) \leqslant 0$.

Если доопределить функцию $K_1(P, A)$ при $P = A$, положив

$$K_1(A, A) = -\frac{1}{2}\chi(A),$$

то полученная функция, которую мы будем обозначать также $K_1(P, A)$, будет непрерывной по совокупности переменных при произвольных $A \in L$, $P \in L$, а потому равномерно непрерывной. Это же относится и к $K_2(P, A)$.

Мы будем пользоваться теорией интегральных уравнений с непрерывным ядром вида

$$y(P)=\lambda\int_L K(P, A)\, y(A)\, dl_A+f(P),$$

изложенной, например, в моем курсе интегральных уравнений *)

Докажем сначала следующее предложение, необходимое нам в дальнейшем.

Лемма 1. *Потенциал простого слоя*

$$u(Q)=\int_L \omega(A) \ln \frac{1}{r(A, Q)}\, dl_A$$

стремится к нулю при удалении точки Q в бесконечность тогда и только тогда, если

$$\int_L \omega(A)\, dl_A=0. \tag{9,35}$$

Если условие (9,35) *не выполнено, то функция $u(Q)$ при удалении Q в бесконечность по модулю неограниченно растет.*

Доказательство. Возьмем в плоскости любую точку O. Тогда

$$\int_L \omega(A) \ln \frac{1}{r(A, Q)}\, dl_A=$$

$$=\int_L \omega(A) \ln \frac{1}{r(O, Q)}\, dl_A+\int_L \omega(A) \ln \frac{r(O, Q)}{r(A, Q)}\, dl_A=$$

$$=\ln \frac{1}{r(O, Q)} \int_L \omega(A)\, dl_A+\int_L \omega(A) \ln \frac{r(O, Q)}{r(A, Q)}\, dl_A.$$

В полученной сумме при удалении точки Q в бесконечность второе слагаемое стремится к нулю, а первое слагаемое неограниченно растет по модулю тогда и только тогда, если

$$\int_L \omega(A)\, dl_A \neq 0.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

*) И. Г. Петровский, Лекции по теории интегральных уравнений, Гостехиздат, 1951, стр. 50—54.

Теорема 1. *Уравнение* (2,35) *внутренней задачи Дирихле и уравнение* (6,35) *внешней второй краевой задачи имеют одно и только одно решение при любой непрерывной функции* $f(P)$.

Доказательство. Согласно первой теореме Фредгольма мы докажем, что уравнения (2,35) и (6,35) имеют единственное решение при любой непрерывной функции $f(P)$, если покажем, что соответствующие им однородные уравнения имеют только тривиальные, т. е. равные тождественно нулю решения. Так как уравнение (2,35) транспонировано к уравнению (6,35), то согласно второй теореме Фредгольма для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что однородное уравнение

$$\omega(P) = -\frac{1}{\pi}\int_L \omega(A)\frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_P)}{r(A, P)}\,dl_A \tag{10,35}$$

имеет только тривиальное решение.

Пусть $\omega(P)$ — решение уравнения (10,35). Покажем, что $\int_L \omega(A)\,dl_A = 0$. Интегрируя правую и левую части уравнения (10,35) по контуру L, имеем

$$\int_L \omega(P)\,dl_P = -\frac{1}{\pi}\int_L \left[\int_L \omega(A)\frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_P)}{r(A, P)}\,dl_A\right] dl_P.$$

Изменяя порядок интегрирования в правой части этого равенства и используя теорему 4 из § 34, получим

$$\int_L \omega(P)\,dl_P = +\frac{1}{\pi}\int_L \omega(A)\left[\int_L \frac{\cos(\overrightarrow{PA}, n_P)}{r(A, P)}\,dl_P\right] dl_A =$$

$$= \int_L \omega(A)\,dl_A,$$

т. е. $\int_L \omega(P)\,dl_P = 0$.

Рассмотрим функцию

$$u(Q) = \int_L \omega(A)\ln\frac{1}{r(A, Q)}\,dl_A.$$

Из леммы 1 § 35 следует, что $u(Q)$ стремится к нулю при удалении Q в бесконечность. Функция $u(Q)$ является гармонической вне L, и так как $\omega(P)$ удовлетворяет уравнению (10,35), то $\frac{\partial u}{\partial n^+}=0$. Но в § 33 мы показали, что решения одной и той же внешней второй краевой задачи отличаются постоянным слагаемым. Следовательно, $u(Q)=$ $=\text{const}$ в H. Так как $u(Q)\longrightarrow 0$ при $Q\longrightarrow\infty$, то $u(Q)\equiv 0$ в H. Из непрерывности потенциала простого слоя следует, что $u=0$ на L. По теореме о максимуме и минимуме $u\equiv 0$ в G и, следовательно, $\frac{\partial u}{\partial n^-}=0$. Вычитая равенство (21,34) из (22,34), получим, что $\omega(P)\equiv 0$, так как $\frac{\partial u}{\partial n^-}=0$ и $\frac{\partial u}{\partial n^+}=0$.

Теорема 2. *Однородное уравнение*

$$\omega(P)=\frac{1}{\pi}\int\limits_L \omega(A)\frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_P)}{r(A,P)}\,dl_A, \tag{11,35}$$

соответствующее уравнению (5,35), *имеет только одно линейно независимое решение* $\overline{\omega}(P)$, *и* $\int\limits_L \overline{\omega}(A)\,dl_A\neq 0$.

Доказательство. Покажем сначала, что если решение $\overline{\omega}(P)$ уравнения (11,35) не равно тождественно нулю, то

$$\int\limits_L \overline{\omega}(A)\,dl_A\neq 0.$$

Рассмотрим функцию

$$u(Q)=\int\limits_L \overline{\omega}(A)\ln\frac{1}{r(A,Q)}\,dl_A.$$

Функция $u(Q)$ является гармонической вне L. Так как $\overline{\omega}$ удовлетворяет уравнению (11,35), то согласно теореме 6 § 34, $\frac{\partial u}{\partial n^-}=0$ на L. По теореме 2 п. 3 § 28 $u\equiv\text{const}$ в $G+L$. Если $\int\overline{\omega}\,dl_P=0$, то по лемме 1 § 35 $u(Q)\longrightarrow 0$ при удалении Q в бесконечность, т. е. $u(Q)$ является ограниченным решением внешней задачи Дирихле, равным постоянной C на L. В § 32 мы доказали единственность такого решения, и поэтому $u(Q) = C$ в H. Так как $u(Q) \to 0$ при $Q \to \infty$, то $C = 0$, т. е. $u \equiv 0$ на всей плоскости. Из теоремы 6 § 34 получаем, что $\overline{\omega}(P) \equiv 0$ на L.

Существование хотя бы одного нетривиального решения $\overline{\omega}$ у уравнения (11,35) следует из того, что транспонированное к нему уравнение

$$\tau(P) = -\frac{1}{\pi} \int_L \tau(A) \frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_A)}{r(A, P)} dl_A,$$

как легко проверить, имеет решение $\tau(P) \equiv \mathrm{const}$.

Покажем, что уравнение (11,35) не может иметь двух линейно независимых решений. Пусть $\overline{\overline{\omega}}$ — какое-либо решение (11,35), отличное от $\overline{\omega}$. Постоянную α можно всегда выбрать таким образом, чтобы $\int_L (\alpha\overline{\omega} + \overline{\overline{\omega}})\, dl_A = 0$, так как $\int_L \overline{\omega}(A)\, dl_A \neq 0$. Но мы показали выше, что для решения уравнения (11,35) из равенства $\int_L (\alpha\overline{\omega} + \overline{\overline{\omega}})\, dl_A = 0$ следует, что

$$\alpha\overline{\omega} + \overline{\overline{\omega}} \equiv 0.$$

Теорема доказана.

Функция $\overline{\omega}(P)$ имеет простой физический смысл. Она равна плотности распределения заряда на L в том случае, когда $G + L$ является проводником.

Используя теорему 2 и применяя третью теорему Фредгольма, получим:

Теорема 3. *Уравнение* (3,35) *внешней задачи Дирихле имеет решение тогда и только тогда, если*

$$\int_L f(A)\, \overline{\omega}(A)\, dl_A = 0. \tag{12,35}$$

При выполнении этого условия решение уравнения (3,35) *определяется с точностью до произвольного слагаемого.*

Уравнение (5,35) *внутренней второй краевой задачи имеет решение тогда и только тогда, если*

$$\int_L f(A)\, dl_A = 0. \tag{13,35}$$

При выполнении этого условия решение уравнения (5,35) *определяется с точностью до слагаемого* $C\overline{\omega}(P)$, *где* C — *произвольная постоянная.*

3. Решение краевых задач. Из теорем 1 и 3 настоящего параграфа мы получим сейчас результаты об условиях разрешимости основных краевых задач. Прежде всего из теоремы 1 следует, что при наших ограничениях в G всегда существует единственное решение внутренней задачи Дирихле, представимое в виде потенциала двойного слоя. В силу доказанной раньше единственности решения задачи Дирихле мы можем сказать, что решение интегрального уравнения (2,35) эквивалентно решению внутренней задачи Дирихле.

Далее из теоремы 3 следует, что решение внутренней второй краевой задачи существует для таких заданных на границе функций $f(A)$, для которых выполняется условие

$$\int_L f(A)\, dl_A = 0.$$

Докажем, что это условие является необходимым для разрешимости внутренней второй краевой задачи с заданной функцией $f(A)$ *). Пусть $u(Q)$ — гармоническая функция в G, непрерывная в $G+L$, и $\frac{\partial u}{\partial n} = f(A)$ на L. Выберем постоянную C так, чтобы

$$\int_L (f(A) + C)\, dl_A = 0.$$

Мы доказали выше, что существует гармоническая в G и непрерывная в $G+L$ функция $v(Q)$, для которой $\frac{\partial v}{\partial n} = f(A) + C$ на L. Гармоническая в G функция $w = v - u$ непрерывна в $G+L$ и $\frac{\partial w}{\partial n} = C$ на L.

*) В § 33 мы доказали необходимость этого условия в более узких предположениях.

По теореме 1 п. 3 § 28 $w = \text{const}$ и $C = 0$, так как если w отлична от постоянной, то $\frac{\partial w}{\partial n}$ должна иметь разные знаки в точках L, где w принимает наибольшее и наименьшее значения. Отсюда следует, что

$$\int_L f(A)\, dl_A = 0.$$

В § 28 было доказано, что решение внутренней второй краевой задачи определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Переходя к решению внешней задачи Дирихле, мы видим, что в силу теоремы 3 не при любой граничной функции можно найти распределение диполей, дающее решение этой задачи. Это объясняется тем, что, как легко видеть, всякий потенциал двойного слоя (12,34) стремится к нулю на бесконечности, а мы в § 32 доказали существование и единственность решения внешней задачи Дирихле, предполагая решение всего лишь ограниченным на бесконечности. При граничной функции, удовлетворяющей условию (12,35), существует решение внешней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя. При произвольной непрерывной функции $f(P)$ можно поступить следующим образом. Образуем функцию

$$f_1(P) = f(P) + C^*,$$

где константу C^* подберем так, чтобы $f_1(P)$ удовлетворяла условию (12,35). Для этого надо положить

$$C^* = -\frac{\int_L f(A)\,\bar{\omega}(A)\,dl_A}{\int_L \bar{\omega}(A)\,dl_A}, \tag{14,35}$$

что можно сделать, так как в силу теоремы 2

$$\int_L \bar{\omega}(A)\, dl_A \neq 0.$$

После определения C^* решим уравнение (3,35), подставив f_2 вместо f. Пусть одним из решений будет $\tau_1(P)$. Тогда решением поставленной внешней задачи Дирихле будет функция

$$u(Q)=\int_L \tau_1(A)\frac{\cos(\overrightarrow{AQ}, n_A)}{r(A, Q)}\,dl_A - C^*.$$

Что касается постоянного слагаемого, входящего в определенную из уравнения (3,35) плотность диполей, то оно не скажется на решении внешней задачи Дирихле, так как вне G потенциал постоянного распределения диполей равен нулю (см. теорему 4 § 34).

Рассмотрим, наконец, внешнюю вторую краевую задачу. Как мы показали, соответствующее этой задаче интегральное уравнение (6,35) разрешимо при любой непрерывной функции $f(P)$. Так как решение внешней второй краевой задачи является функцией, ограниченной на бесконечности, то потенциал простого слоя с плотностью, определяемой как решение уравнения (6,35), будет решением внешней второй краевой задачи тогда и только тогда, если он ограничен.

По лемме 1 для ограниченности потенциала простого слоя на бесконечности необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_L \omega(A)\,dl_A = 0.$$

Интегрируя уравнение (6,35), изменяя порядок интегрирования и используя теорему 4 из § 34, получим

$$\int_L f(P)\,dl_P = \pi\int_L \omega(P)\,dl_P + \int_L\left[\int_L \omega(A)\frac{\cos(\overrightarrow{AP}, n_P)}{r(A, P)}\,dl_A\right]dl_P =$$

$$= \pi\int_L \omega(P)\,dl_P - \int_L \omega(A)\left[\int_L \frac{\cos(\overrightarrow{PA}, n_P)}{r(P, A)}\,dl_P\right]dl_A =$$

$$= 2\pi\int_L \omega(P)\,dl_P.$$

Поэтому условие $\int_L f(P)\,dl_P = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы построенный при помощи уравнения (6,35) потенциал простого слоя был ограниченным на бесконечности. По лемме 1 при выполнении этого условия построенный потенциал обязан стремиться к нулю на бесконечности. Условие (13,35) является вместе с тем и необходимым условием для разрешимости внешней второй краевой задачи. Это следует из необходимости условия (13,35) для разрешимости внутренней второй краевой задачи и равенства (4,33). Кроме того, из п. 3 § 33 следует, что решение внешней второй краевой задачи определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

4. Решение краевых задач для круга. Если G — круг, то решение интегральных уравнений (2,35), (3,35), (5,35) и (6,35) особенно просто. Действительно, если обозначить через R радиус круга, то легко проверить, что при $A \in L$ и $P \in L$ будет

$$\cos(\overrightarrow{AP}, \boldsymbol{n}_A) = -\cos(\overrightarrow{AP}, \boldsymbol{n}_P) = -\frac{1}{2}\frac{r(A, P)}{R}$$

и уравнения (2,35), (3,35) переходят в

$$\tau(P) = \mp\frac{1}{2\pi R}\int\limits_L \tau(A)\,dl_A \mp \frac{1}{\pi} f(P) \quad (P \in L), \quad (15,35)_{1,2}$$

а уравнения (5,35) и (6,35) — в уравнения

$$\omega(P) = \pm\frac{1}{2\pi R}\int\limits_L \omega(A)\,dl_A + \frac{1}{\pi} f(P) \quad (P \in L). \quad (16,35)_{1,2}$$

Решим уравнение $(15,35)_1$. Для этого обозначим

$$\int\limits_L \tau(A)\,dl_A = C$$

и проинтегрируем обе части $(15,35)_1$ по L. Тогда получим

$$C = -C - \frac{1}{\pi}\int\limits_L f(P)\,dl_P; \quad C = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_L f(P)\,dl_P.$$

Подставляя значение C в $(15,35)_1$, получим

$$\tau(P) = \frac{1}{4\pi^2 R}\int\limits_l f(A)\,dl_A - \frac{1}{\pi} f(P) \quad (P \in L).$$

Теперь из (13,34) следует, что при $Q \in G$ будет в силу теоремы 4 § 34

$$\underset{\sim}{u}(Q)=\int_L\left[\frac{1}{4\pi^2R}\int_L f(A)\,dl_A-\frac{1}{\pi}f(A)\right]\frac{\cos(\overrightarrow{AQ},\, n_A)}{r(A,\, Q)}\,dl_A=$$

$$=-\frac{1}{2\pi R}\int_L f(A)\,dl_A-\frac{1}{\pi}\int_L f(A)\frac{\cos(\overrightarrow{AQ},\, n_A)}{r(A,\, Q)}\,dl_A=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_L\left[\frac{\cos(\overrightarrow{QA},\, n_A)}{r(A,\, Q)}-\frac{1}{2R}\right]f(A)\,dl_A.$$

Мы в другой форме получили, таким образом, интеграл Пуассона, рассмотренный в § 29.

Перейдем к уравнению $(15{,}35)_2$. Однородное уравнение, соответствующее $(16{,}35)_1$, имеет нетривиальное решение $\overline{\omega}(P)\equiv\mathrm{const}\neq 0$ (см. теорему 2). Таким образом, условия (12,35) и $\int_L f(A)\,dl_A=0$ здесь совпадают. Если условие $\int_L f(A)\,dl_A = 0$ выполнено, то уравнение $(15{,}35)_2$ имеет решение

$$\tau(P)=\frac{1}{\pi}f(P)+C\quad(P\in L),$$

где C произвольно. В общем же случае получим (см. (14,35))

$$C^*=-\frac{1}{2\pi R}\int_L f(A)\,dl_A;\quad f_1(P)=f(P)-\frac{1}{2\pi R}\int_L f(A)\,dl_A;$$

$$\tau_1(P)=\frac{1}{\pi}f(P)-\frac{1}{2\pi^2R}\int_l f(A)\,dl_A+C;$$

$$\tilde{u}(Q)=\int_L\left[\frac{1}{\pi}f(A)-\frac{1}{2\pi^2R}\int_L f(A)\,dl_A\right]\frac{\cos(\overrightarrow{AQ},\, n_A)}{r(A,\, Q)}\,dl_A+$$

$$+\frac{1}{2\pi R}\int_L f(A)\,dl_A=-\frac{1}{\pi}\int_L\left[\frac{\cos(\overrightarrow{QA},\, n_A)}{r(A,\, Q)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2R}\right]f(A)\,dl_A\quad(Q\in H).$$

Задача. Решить уравнения $(16,35)_{1,2}$ и получить в связи с этим решение внутренней и внешней второй краевой задачи для круга. При решении последней задачи использовать формулу

$$\int\limits_0^\pi \ln(1+p^2-2p\cos\varphi)\,d\varphi=0, \quad -1<p<1.$$

5. Рассмотрим уравнение Пуассона

$$\Delta u=f(x, y). \tag{17,35}$$

Мы предположим, что функция $f(x, y)=f(P)$ задана в ограниченной области G, ограничена и имеет непрерывные частные производные 1-го порядка. Будем решать внутреннюю задачу Дирихле для этого уравнения *). Достаточно найти какое-нибудь одно решение уравнения (17,35), непрерывное в $\overline{G}=G+L$, не обращая внимания на краевую функцию. Действительно, если v — такое решение, то, положив

$$u=v+w,$$

где w — решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа с краевым условием

$$w\Big|_L=u\Big|_L-v\Big|_L,$$

получим, что u является решением исходной задачи. Тем самым вопрос о существовании и единственности решения внутренней задачи Дирихле для уравнения (17,35) полностью сведется к такому же вопросу для уравнения Лапласа.

Докажем, что частным решением уравнения (17,35) является функция

$$v(P)=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_G f(A)\ln\frac{1}{r(A, P)}\,ds_A \tag{18,35}$$

(*логарифмический потенциал с плотностью заряда* $-\frac{1}{2\pi}f(A)$).

*) То есть мы будем искать непрерывное в $\overline{G}$ решение уравнения (17,35), которое на границе G принимает значения заданной там непрерывной функции.

Проверим прежде всего, что интеграл (18,35) сходится и представляет собой непрерывную функцию P на всей плоскости. Для этого, аналогично § 34, достаточно проверить равномерную сходимость интеграла (18,35) в любой точке $P_0 \in \bar{G}$. При этом определение равномерной сходимости должно быть естественным образом изменено.

Обозначим при любом $\rho > 0$ через $D_\rho(P_0)$ внутренность круга с центром P_0 и радиусом ρ, а через $G_\rho(P_0)$ — общую часть $D_\rho(P_0)$ и G. Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\rho > 0$, что для любой точки $P \in D_\rho(P_0)$ интеграл

$$\iint\limits_{G_\rho(P_0)} f(A) \ln \frac{1}{r(A, P)} ds_A$$

сходится и по абсолютной величине $< \varepsilon$. Для этого обозначим через M верхнюю грань $|f|$ в G и перейдем к полярным координатам с полюсом в точке P. Тогда, если $\rho \leqslant \frac{1}{2}$, то

$$\left| \iint\limits_{G_\rho(P_0)} f(A) \ln \frac{1}{r(A, P)} ds_A \right| \leqslant M \iint\limits_{G_\rho(P_0)} |\ln r(A, P)| \, ds_A \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\rho} (-\ln r) \, r \, dr \, d\varphi = 4\pi M \rho^2 \left(\ln \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{2} \right). \quad (19,35)$$

Последнее выражение при $\rho \to 0$ стремится к нулю равномерно для всех P, принадлежащих $D_\rho(P_0)$.

Докажем, что интеграл (18,35) имеет непрерывные частные производные первого порядка. Обозначим координаты точки P через (x, y), а A — через (a, b) и продифференцируем сначала этот интеграл по x формально, не заботясь о сходимости. Получим

$$\varphi(P) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_G f(A) \frac{x - a}{[r(A, P)]^2} ds_A. \quad (20,35)$$

Аналогично (19,35), легко проверить, что этот интеграл равномерно сходится в каждой точке $\bar{G} = G + L$ и потому представляет собой функцию, непрерывную на всей плоскости.

Чтобы доказать, что $\varphi(P) \equiv v'_x(P)$, возьмем любую фиксированную точку $P(x, y)$ *) и точку $P_1(x+h, y)$ $(h \neq 0)$. Тогда

$$\left|\varphi(P) - \frac{v(P_1) - v(P)}{h}\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\iint\limits_G f(A)\frac{x-a}{[r(A, P)]^2}ds_A - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{h}\left(-\iint\limits_G f(A)\ln\frac{1}{r(A, P_1)}ds_A + \iint\limits_G f(A)\ln\frac{1}{r(A, P)}ds_A\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\iint\limits_{G_\rho(P)} f(A)\frac{x-a}{[r(A, P)]^2}ds_A\right| + \frac{1}{2\pi h}\left|\iint\limits_{G_\rho(P)} f(A)\ln\frac{r(A, P)}{r(A, P_1)}ds_A\right| +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\left|\iint\limits_{G - G_\rho(P)} f(A)\left(\frac{x-a}{[r(A, P)]^2} - \frac{1}{h}\ln\frac{r(A, P_1)}{r(A, P)}\right)ds_A\right|. \quad (21{,}35)$$

Первый из полученных интегралов стремится к нулю вместе с ρ в силу равномерной сходимости интеграла (20,35) в точке P. Второй также стремится к 0, если $0 < |h| < \rho$. Для доказательства этого разобьем $G_\rho(P)$ на части $G'_\rho(P)$, где $r(A, P) > r(A, P_1)$, и $G''_\rho(P)$, где $r(A, P) \leqslant r(A, P_1)$, и учтем, что $\ln(1+\delta) < \delta$ при $\delta > 0$. Получим

$$\frac{1}{2\pi h}\left|\iint\limits_{G_\rho(P)} f(A)\ln\frac{r(A, P)}{r(A, P_1)}ds_A\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2\pi h}\left(\iint\limits_{G'_\rho(P)} \ln\frac{r(A, P)}{r(A, P_1)}ds_A + \iint\limits_{G''_\rho(P)} \ln\frac{r(A, P_1)}{r(A, P)}ds_A\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2\pi h}\left(\iint\limits_{G'_\rho(P)} \frac{r(A, P) - r(A, P_1)}{r(A, P_1)}ds_A + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{G''_\rho(P)} \frac{r(A, P_1) - r(A, P)}{r(A, P)}ds_A\right) \leqslant$$

---

*) Совершенно так же, как в теореме 2 на стр. 288, легко показать, что вне области G функция $v(P)$ гармонична.

$$\leqslant \frac{M}{2\pi}\left(\iint\limits_{G'_\rho(P)} \frac{ds_A}{r(A, P_1)} + \iint\limits_{G''_\rho(P)} \frac{ds_A}{r(A, P)} \right)^{*)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2\pi}\cdot 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\rho} \frac{1}{r} r\,dr\,d\varphi = 4M\rho.$$

Можно выбрать $\rho > 0$ настолько малым, что первый и второй интегралы в правой части (21,35) будут $< \frac{\varepsilon}{3}$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное наперед заданное число. Зафиксировав это ρ, за счет уменьшения $|h|$ можно сделать последний интеграл в (21,35) меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, так как при $|h| \to 0$ подынтегральная функция равномерно стремится к нулю в $G - G_\rho(P)$.

Рассмотрение v'_y проводится аналогично. Итак,

$$v'_x(P) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G f(A)\frac{x-a}{[r(A, P)]^2}ds_A,$$

$$v'_y(P) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G f(A)\frac{y-b}{[r(A, P)]^2}ds_A.$$

До сих пор мы пользовались только ограниченностью непрерывной функции $f(P)$. Для дальнейшего мы воспользуемся наличием у $f(P)$ непрерывных частных производных первого порядка. Зафиксируем точку $P_0 \in G$ и выберем ρ настолько малым, чтобы $D_\rho(P_0) \in G$. Тогда интеграл

$$v_1(P) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G-D_\rho(P_0)} f(A)\ln\frac{1}{r(A, P)}ds_A$$

имеет в $D_\rho(P_0)$ непрерывные частные производные всех порядков и удовлетворяет уравнению

$$\Delta v_1 = 0, \qquad (22{,}35)$$

так как этот интеграл можно дифференцировать под знаком интеграла по координатам точки P, лежащей в $D_\rho(P_0)$, без

*) Так как $|r(A, P) - r(A, P_1)| \leqslant h$.

каких-либо ограничений. Значит, достаточно рассмотреть интеграл

$$v_2(P) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D_\rho(P_0)} f(A)\ln\frac{1}{r(A,\,P)}\,ds_A.$$

Проинтегрируем выражение для $\frac{\partial v_2}{\partial x}$ по частям:

$$\frac{\partial v_2(P)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D_\rho(P_0)} f(A)\frac{x-a}{[r(A,\,P)]^2}\,ds_A =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D_\rho(P_0)}\left\{-\frac{\partial}{\partial a}[f(A)\ln r(A,\,P)] + f'_a(A)\ln r(A,\,P)\right\}da\,db =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_\rho(P_0)} f(A)\ln r(A,\,P)\,db -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D_\rho(P_0)} f'_a(A)\ln\frac{1}{r(A,\,P)}\,ds_A, \qquad (23{,}35)$$

где $C_\rho(P_0)$ — окружность круга $D_\rho(P_0)$, а интегрирование по $C_\rho(P_0)$ происходит в положительном направлении. Из доказанного ранее следует, что последний интеграл имеет непрерывные частные производные первого порядка, сколь угодно малые при $P \in D_\rho(P_0)$, если ρ достаточно мало. Первый же интеграл в правой части (23,35) можно в $D_\rho(P_0)$ дифференцировать по x и y без каких-либо ограничений, так как точка P не лежит на линии интегрирования. Аналогично исследуется выражение для $\frac{\partial v_2}{\partial y}$. Итак, существование и непрерывность частных производных второго порядка у $v_2(P)$ в $D_\rho(P_0)$, а тем самым и у $v(P)$ в G доказаны.

Далее, при $P \in D_\rho(P_0)$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_\rho(P_0)} f(A)\frac{x-a}{[r(A,\,P)]^2}\,db + \eta_1(P,\,\rho),$$

где $\eta_1(P,\,\rho)$ равномерно стремится к нулю при $\rho \to 0$ и $P \in D_\rho(P_0)$. Аналогично,

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_\rho(P_0)} f(A)\frac{y-b}{[r(A,\,P)]^2}\,da + \eta_2(P,\,\rho).$$

Перейдем к полярным координатам с центром в $P_0(x_0, y_0)$. Тогда в силу (22,35)

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v_2(P_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2(P_0)}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_\rho(P_0)} \frac{f(A)}{[r(A, P)]^2}[(y_0 - b)\,da - (x_0 - a)\,db] + \eta_1(P_0, \rho) + \eta_2(P_0, \rho) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi)(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi + \eta_1 + \eta_2.$$

Последнее выражение при $\rho \to 0$ стремится к $f(P_0)$, т. е. $\Delta v = f(P_0)$.

Отметим, что условия, наложенные на правую часть уравнения (17,35), можно было бы ослабить. Однако требовать только непрерывности и ограниченности функции $f(P)$ в G нельзя, так как тогда интеграл (18,35) может не иметь частных производных второго порядка. В связи с этим И. И. Привалов ввел понятие обобщенного оператора Лапласа, определяемого равенством

$$\Delta^*\varphi(P) = \lim_{\rho \to 0} \frac{4}{\rho^2}\left[\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{D_\rho(P)} \varphi(A)\,ds_A - \varphi(P)\right].$$

Можно доказать, что если $\varphi(P)$ имеет в G непрерывные частные производные второго порядка, то при $P \in G$ существует $\Delta^*\varphi(P)$ и тождественно равно $\Delta\varphi(P)$. В то же время, если $f(P)$ непрерывна и ограничена в ограниченной области G и $v(P)$ определено формулой (18,35), то $\Delta^* v(P)$ существует и

$$\Delta^* v(P) \equiv f(P).$$

Замечание. Все рассуждения настоящего параграфа естественно переносятся на ньютоновский потенциал (5,34) заряженной области в трехмерном пространстве. Если предположить, что плотность зарядов $\rho(A)$ непрерывна вместе со своими первыми производными и ограничена, то сам потенциал $u(Q)$ оказывается всюду непрерывным. Он гармоничен вне заряженной области и удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-4\pi\rho$$

внутри заряженной области.

§ 36. Метод сеток для приближенного решения задачи Дирихле

Пусть на границе конечной области G задана непрерывная функция f. Допустим, что существует гармоническая внутри G функция u, которая на границе G принимает заданные значения f. Для приближенного нахождения u Л. А. Люстерник*) в 1925 г. предложил следующий метод, который для простоты мы изложим только для двумерной области, хотя он одинаково применим и для областей большего числа измерений. В этом изложении мы не будем сначала проводить все доказательства. Недоказанные места отмечены курсивом, как некоторые теоремы. Они будут доказаны несколько позже.

На плоскости (x, y), где расположена область G, проведем два семейства *(сетку)* прямых, параллельных координатным осям

$$x=mh \quad \text{и} \quad y=nh,$$

где h — некоторое положительное число, а m и n пробегают такие последовательные целые значения, чтобы вся область G покрылась квадратами со стороной h. Вершины этих квадратов мы будем называть узлами или узловыми точками построенной сетки. Наша цель — определить в узловых

---

*) См. Успехи матем. наук, вып. VIII (1941), 115—124. Л. А. Люстерник не предполагал существования решения задачи Дирихле. Он методом сеток доказывал существование решения этой задачи при некоторых предположениях о границе G. Но его доказательство не распространялось непосредственно на области большего, чем 2, числа измерений.

Существование решения задачи Дирихле методом сеток для уравнения Лапласа с любым числом независимых переменных для широкого класса областей доказано в работе: И. Г. Петровский, Успехи матем. наук, вып. VIII (1941), 161—170.