вне заряженной области и удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-4\pi\rho$$

внутри заряженной области.

§ 36. Метод сеток для приближенного решения задачи Дирихле

Пусть на границе конечной области G задана непрерывная функция f. Допустим, что существует гармоническая внутри G функция u, которая на границе G принимает заданные значения f. Для приближенного нахождения u Л. А. Люстерник *) в 1925 г. предложил следующий метод, который для простоты мы изложим только для двумерной области, хотя он одинаково применим и для областей большего числа измерений. В этом изложении мы не будем сначала проводить все доказательства. Недоказанные места отмечены курсивом, как некоторые теоремы. Они будут доказаны несколько позже.

На плоскости (x, y), где расположена область G, проведем два семейства *(сетку)* прямых, параллельных координатным осям

$$x=mh \quad \text{и} \quad y=nh,$$

где h — некоторое положительное число, а m и n пробегают такие последовательные целые значения, чтобы вся область G покрылась квадратами со стороной h. Вершины этих квадратов мы будем называть узлами или узловыми точками построенной сетки. Наша цель — определить в узловых

---

*) См. Успехи матем. наук, вып. VIII (1941), 115—124. Л. А. Люстерник не предполагал существования решения задачи Дирихле. Он методом сеток доказывал существование решения этой задачи при некоторых предположениях о границе G. Но его доказательство не распространялось непосредственно на области большего, чем 2, числа измерений.

Существование решения задачи Дирихле методом сеток для уравнения Лапласа с любым числом независимых переменных для широкого класса областей доказано в работе: И. Г. Петровский, Успехи матем. наук, вып. VIII (1941), 161—170.

точках, находящихся внутри G, приближенные значения u. Эти приближенные значения мы будем обозначать через u_h.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и обозначим через Γ_ε совокупность квадратов, у которых одна из вершин отстоит от границы G не больше, чем на ε. В каждой вершине, принадлежащей какому-нибудь квадрату Γ_ε, положим u_h равным значению f в ближайшей к этой вершине граничной точке G или в одной из таких точек, если их несколько. При достаточно малых h и ε определенные таким образом в узловых точках Γ_ε значения u_h как угодно мало отличаются от значений в этих точках u. Действительно, функция, равная u внутри G и f на границе G, равномерно непрерывна в $\bar{G}$. Поэтому значения ее в двух точках P_1 и P_2, принадлежащих $\bar{G}$, делаются как угодно близкими, если расстояние P_1P_2 достаточно мало. В дальнейшем мы будем всегда считать, что $h < \varepsilon$.

Точки области G, расположенные внутри и на границах квадратов, не входящих в Γ_ε, образуют один или несколько многоугольников M. Узловые точки, лежащие на границе каждого такого многоугольника, принадлежат Γ_ε, и потому значения u_h в них уже определены. Значения u_h в узловых точках, лежащих внутри этих многоугольников, определим как решение некоторой системы линейных уравнений, число которых равно числу не определенных пока значений u_h, т. е. числу узловых точек, лежащих внутри G и не принадлежащих Γ_ε. Эта система уравнений составляется следующим образом. Для внутренней узловой точки (x, y) пишется уравнение

$$u_h(x, y) = \frac{u_h(x+h, y) + u_h(x-h, y) + u_h(x, y+h) + u_h(x, y-h)}{}$$

или

$$u_h(x+h, y) + u_h(x-h, y) + \\ + u_h(x, y+h) + u_h(x, y-h) - 4u_h(x, y) = 0. \qquad (1,36)$$

Если какая-нибудь из точек $(x+h, y)$, $(x-h, y)$, $(x, y+h)$, $(x, y-h)$ принадлежит Γ_ε, то соответствующее u_h заменяется в уравнении (1,36) определенным ранее значением u_h в этой точке. Можно показать, что *система уравнений* (1,36) *имеет всегда единственное решение* (теорема 1) и что, *выбрав сначала* ε *достаточно малым, а потом уменьшив* *достаточно* h, *мы придем к таким* u_h, *которые как угодно мало отличаются от значений функции* $u(x, y)$ *в соответствующих точках* (теорема 2); *необходимая для этого малость* h *зависит от* ε. Пользуясь обычными правилами алгебры, систему уравнений (1,36) трудно решить, если h мало и, следовательно, число уравнений велико. Но *для приближенного решения системы* (1,36) *можно очень просто воспользоваться методом последовательных приближений* (теорема 3).

Уравнение (1,36) является аналогом в конечных разностях дифференциального уравнения Лапласа. В самом деле, предположим, что в рассматриваемой области G функция u имеет ограниченные производные до четвертого порядка. Допустим, что точки $(x+h, y)$, $(x-h, y)$, $(x, y+h)$, $(x, y-h)$, а также отрезки прямых между точкой (x, y) и точками $(x+h, y)$, $(x-h, y)$, $(x, y+h)$, $(x, y-h)$ лежат внутри G. Тогда

$$u(x+h, y)=u(x, y)+hu'_x(x, y)+\\ +\frac{h^2}{2}u''_{xx}(x, y)+\frac{h^3}{6}u'''_{xxx}(x, y)+\frac{h^4}{24}u''''_{xxxx}(\tilde{x}, y),$$

$$u(x-h, y)=u(x, y)-hu'_x(x, y)+\\ +\frac{h^2}{2}u''_{xx}(x, y)-\frac{h^3}{6}u'''_{xxx}(x, y)+\frac{h^4}{24}u''''_{xxxx}(\approx{x}, y),$$

$$u(x, y+h)=u(x, y)+hu'_y(x, y)+\\ +\frac{h^2}{2}u''_{yy}(x, y)+\frac{h^3}{6}u'''_{yyy}(x, y)+\frac{h^4}{24}u''''_{yyyy}(x, \tilde{y}),$$

$$u(x, y-h)=u(x, y)-hu'_y(x, y)+\frac{h^2}{2}u''_{yy}(x, y)-\\ -\frac{h^3}{6}u'''_{yyy}(x, y)+\frac{h^4}{24}u''''_{yyyy}(x, \approx{y}).$$

Здесь $\tilde{x}$, $\approx{x}$, $\tilde{y}$ и $\approx{y}$ означают числа, заключенные соответственно между x и $x+h$; x и $x-h$; y и $y+h$; y и $y-h$. Очевидно,

$$u(x+h, y)+u(x-h, y)+u(x, y+h)+u(x, y-h)-\\ -4u(x, y)=h^2[u''_{xx}(x, y)+u''_{yy}(x, y)]+\frac{h^4}{6}M_1\theta, -1\leqslant\theta\leqslant 1,$$

где M_1 означает верхнюю грань значений $|u''''_{xxxx}|$ и $|u''''_{yyyy}|$.

Поэтому левая часть уравнения

$$\frac{u(x+h,\ y)+u(x-h,\ y)+u(x,\ y+h)+u(x,\ y-h)-4u(x,\ y)}{h^2}=0$$

эквивалентна выражению $u''_{xx}+u''_{yy}$ с точностью до величины порядка h^2.

Теорема 1. *Система уравнений* (1,36) *всегда имеет единственное решение.*

Доказательство. Перепишем эту систему так, чтобы в левых частях уравнений остались значения u_h во внутренних узловых точках многоугольников M, а в правые части перенесем значения u_h в граничных узловых точках этих многоугольников, т. е. в точках Γ_ε. Напомним, что эти последние значения мы определили; поэтому будем считать правые части этих уравнений известными. Пусть наша система получила вид

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}u_j=f_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{2,36}$$

где N — число внутренних узловых точек у многоугольников M. Мы занумеровали все внутренние узловые точки многоугольников и значение u_h в j-й точке обозначили через u_j. Правые части (2,36) суть линейные комбинации значений u_h в граничных узловых точках многоугольников M.

Как известно из курса высшей алгебры, чтобы доказать, что система (2,36) при всяких f_i имеет единственное решение, достаточно доказать, что соответствующая однородная система имеет только нулевое решение. Доказательство этого последнего утверждения будем вести от противного. Допустим, что система

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}u_j=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N) \tag{3,36}$$

имеет нетривиальное решение. Обозначим через B наибольшее из чисел $|u_j|$ $(j=1,\ \ldots,\ N)$, которое, по предположению, больше нуля. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что B равно какому-нибудь из u_j, так как случай, когда $-B$ равно какому-нибудь из u_j, сводится к предыдущему переменой знака у всех u_j. Итак, пусть B равно некоторому u_{j_0}. Так как u_{j_0} равно среднему арифметическому значений u_j в четырех соседних узловых точках, то в каждой из этих соседних узловых точек u_j также должно быть равно B (раз все значения u_h в точках, соседних с j_0, не могут быть больше B, то они не могут быть и меньше B); соседними узловыми точками с точкой (x, y) мы называем точки $(x+h, y)$, $(x-h, y)$, $(x, y+h)$, $(x, y-h)$. Применяя это рассуждение к каждой из узловых точек, соседних с j_0-й узловой точкой, мы найдем, что в соседних с ними узловых точках u_j также равны B. Продолжая такие же рассуждения, мы найдем, что $u_j=B$ во всех узловых точках, принадлежащих границе некоторого многоугольника M и соседних с одной и той же его внутренней точкой P. Но это противоречит тому, что правые части f_l всех уравнений (3,36) равны нулю. Действительно, f_l суть линейные комбинации значений u_h в точках Γ_ε с коэффициентами, равными -1, как это легко видеть, сравнивая формулы (2,36) и (1,36). Поэтому все f_i не могут быть нулями, если u_h во всех точках Γ_ε, соседних с P, равны $B>0$.

Теорема 2. *Если $u(x, y)$ — точное решение задачи Дирихле, а u_h — решение системы* (1,36) *при описанных выше граничных условиях, то, выбрав $\varepsilon>0$ достаточно малым, а потом уменьшив достаточно h, мы придем к таким u_h, которые как угодно мало отличаются от значений $u(x, y)$ в соответствующих точках.*

Доказательство. Покажем, что при h достаточно малом $|u_h-u|<\delta$ во всех узлах сетки. Для этого поместим начало координат внутрь области G. Выберем ε настолько малым, чтобы $\max|u_h-u|$ в точках Γ_ε был меньше $\frac{\delta}{2}$, и рассмотрим вспомогательную функцию v_h, определенную формулой

$$v_h=u_h-u-\frac{\delta}{2D^2}(D^2-x^2-y^2)-\frac{\delta}{2}.$$

Здесь D означает диаметр области G, т. е. верхнюю грань расстояний между ее точками.

Очевидно, что в узловых точках, принадлежащих Γ_ε, $v_h<0$, так как там $|u_h-u|<\frac{\delta}{2}$, а $D^2>x^2+y^2$. Покажем, что при достаточно малом h во всех узлах, принадлежащих M, $v_h<0$ и, следовательно, $u_h-u<\delta$. Для этого применим к функции v_h оператор Δ_h, ставящий в соответствие функции $\varphi(x, y)$ функцию

$$\varphi(x+h, y)+\varphi(x-h, y)+\varphi(x, y+h)+ \\ +\varphi(x, y-h)-4\varphi(x, y).$$

Очевидно,

$$\Delta_h v_h = \Delta_h u_h - \Delta_h u + \frac{\delta}{2D^2}\Delta_h(x^2+y^2).$$

Но

$$\Delta_h u_h = 0; \quad \Delta_h(x^2+y^2) = 4h^2; \quad |\Delta_h u| < \frac{M_2 h^4}{6},$$

где M_2 есть верхняя грань значений $|u''''_{xxxx}|$ и $|u''''_{yyyy}|$ в многоугольниках M. Поэтому

$$\Delta_h v_h > 4h^2 \frac{\delta}{2D^2} - \frac{M_2 h^4}{2} \tag{4,36}$$

и при достаточно малом h

$$\Delta_h v_h > 0. \tag{5,36}$$

Но тогда легко видеть, что v_h не может принимать наибольшее значение *внутри* какого-нибудь из многоугольников M. А отсюда следует, что во всех внутренних точках многоугольников M величина $v_h < 0$, так как она отрицательна на границе этих многоугольников.

Рассматривая функцию

$$w_h = u - u_h - \frac{\delta}{2D^2}(D^2 - x^2 - y^2) - \frac{\delta}{2},$$

мы совершенно аналогичным образом можем убедиться, что $u - u_h < \delta$. Сопоставляя оба результата, получаем, что $|u - u_h| < \delta$ при достаточно малом h, что и требовалось доказать.

Замечание. Если точное решение $u(x, y)$ задачи Дирихле имеет в G ограниченные производные до четвертого порядка включительно, то постоянную M_2 в правой части (4,36) можно считать не зависящей от ε. Поэтому достаточно малое h, при котором выполняется неравенство (5,36), тоже может быть выбрано независимо от ε. Ввиду этого можно упростить указанное выше построение, взяв в качестве M совокупность всех квадратов со стороной h, содержащихся вместе с границей внутри G.

До сих пор нам было совершенно безразлично, в каком порядке занумерованы узловые точки, находящиеся внутри многоугольников M. Сейчас нам важно установить следующий порядок.

Первая узловая точка обязательно должна в качестве одной из своих соседних точек иметь точку, лежащую на границе какого-нибудь из этих многоугольников (напоминаем, что соседней узловой точкой с точкой (x, y) мы называем одну из точек $(x+h, y)$, $(x-h, y)$, $(x, y+h)$, $(x, y-h)$). Вторая узловая точка должна иметь в качестве одной из соседних узловых точек или граничную точку какого-нибудь многоугольника M, или первую точку, и т. д. При такой нумерации узловых точек систему уравнений (1,36) можно приближенно решать так. Зададим сначала произвольные значения $u_1, u_2, \ldots, u_N$. Эти значения мы будем обозначать через $u_k^{(0)}$ и называть нулевым приближением к решению системы (1,36). Чтобы описать способ нахождения следующих приближений, удобно представить себе, что все $u_k^{(0)}$ записаны в соответствующих узлах сетки. Тогда для получения следующего — первого приближения — сотрем в первой узловой точке записанное там значение $u_1^{(0)}$ и напишем вместо него $u_1^{(1)}$, равное среднему арифметическому значений $u_k^{(0)}$ в четырех узловых точках, соседних с первой узловой точкой. Потом сотрем значение $u_2^{(0)}$, записанное во второй узловой точке, и заменим его числом $u_2^{(1)}$, равным среднему арифметическому значений, записанных в четырех узловых точках, соседних со второй узловой точкой (в одной из них может оказаться $u_1^{(1)}$) и т. д. Обойдя таким образом все внутренние узловые точки, мы получим в них значения $u_k^{(1)}$ $(k=1, \ldots, N)$. Значения второго приближения $u_k^{(2)}$ $(k=1, \ldots, N)$ получаются из значений $u_k^{(1)}$ так же, как $u_k^{(1)}$ получились из $u_k^{(0)}$. Аналогично получаются $u_k^{(3)}$, $u_k^{(4)}$, ... и т. д.

Теорема 3. *При $n \to \infty$ для всех k $(k=1, 2, \ldots, N)$*

$$u_k^{(n)} \to u_k,$$

где u_k составляют точное решение системы (1,36).

Доказательство. Положим

$$u_k^{(n)} - u_k = v_k^{(n)}.$$

Наша цель — доказать, что $v_k^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $(k=1, 2, \ldots, N)$. Для этого заметим прежде всего, что числа $v_k^{(n+1)}$ получаются из $v_k^{(n)}$ $(k=1, 2, \ldots, N)$ так же, как $u_k^{(n+1)}$ получаются из $u_k^{(n)}$, а именно: $v_k^{(n+1)}$ есть среднее арифметическое значений $v_k^{(n)}$ в четырех узловых точках, соседних с k-й узловой точкой; при этом, если одна из этих соседних узловых точек попадает на границу многоугольника, то в ней считается $v_k^{(n)}$ равным 0. Поэтому, если

$$\max\{|v_1^{(0)}|, |v_2^{(0)}|, \ldots, |v_N^{(0)}|\} = A,$$

то

$$|v_1^{(1)}| \leqslant \frac{3}{4} A,$$

так как одной из соседних с первой узловой точкой служит граничная узловая точка. Аналогично найдем

$$|v_2^{(1)}| \leqslant \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) A, \quad |v_3^{(1)}| \leqslant \left(1 - \frac{1}{4^3}\right) A, \ \ldots,$$

$$|v_N^{(1)}| \leqslant \left(1 - \frac{1}{4^N}\right) A = \alpha A, \text{ причем } \alpha < 1.$$

Так же найдем, что при всех n и k

$$|v_k^{(n)}| \leqslant \alpha^n A \quad \left(\alpha = 1 - \frac{1}{4^N}\right), \tag{6,36}$$

откуда следует, что $v_k^{(n)} \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

Теоретически это соотношение справедливо при любом выборе нулевого приближения. Но практически выгоднее для более быстрого получения хороших приближений к точному решению системы (1,36) за нулевое приближение брать числа, которые, как можно ожидать, не слишком далеки от точного решения задачи Дирихле. Процесс последовательных приближений обычно обрывают на таких значениях n, когда значения $u_k^{(n)}$ перестают заметно меняться при увеличении n. Эти $u_k^{(n)}$ принимают за приближенное решение системы (1,36).

Если при некотором h получается несколько многоугольников M, то система (1,36) распадается на несколько независимых систем, каждая из которых соответствует одному из этих многоугольников. Каждая из этих систем решается независимо от других.

Мы ставили своей целью только доказать сходимость последовательных приближений $u_k^{(n)}$. Полученная при этом оценка (6,36) скорости сходимости процесса очень грубая. Можно было бы показать, что в действительности указанный процесс сходится гораздо быстрее.

Следует отметить, что последовательные приближения $u_k^{(n)}$, полученные указанным выше простым способом, при большом числе N узловых точек сходятся к точному решению u_k системы (1,36) все же очень медленно. Имеются различные приемы, позволяющие ускорить сходимость указанных последовательных приближений к точному решению, а также другие способы приближенного решения системы (1,36), быстрее приводящие к цели.

§ 37. Обзор некоторых результатов для более общих эллиптических уравнений

1. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в случае двух независимых переменных разрешима для любой односвязной области, если заданная на границе функция непрерывна. Для односвязной трехмерной области задача Дирихле не всегда имеет решение. У трехмерной области будет регулярной всякая точка P границы, если до этой точки можно дотронуться извне острием конуса K, полученного при вращении вокруг оси x_1 кривой

$$x_2 = f(x_1) = x_1^k,$$

где k — любое положительное число. Точнее это условие можно сформулировать так: в пространстве (x_1, x_2, x_3), где расположена область G, можно так выбрать оси координат с началом в точке P, что все точки, лежащие внутри конуса K и имеющие положительные абсциссы x_1, не превосходящие некоторого положительного числа η, располагаются