Если при некотором h получается несколько многоугольников M, то система (1,36) распадается на несколько независимых систем, каждая из которых соответствует одному из этих многоугольников. Каждая из этих систем решается независимо от других.

Мы ставили своей целью только доказать сходимость последовательных приближений $u_k^{(n)}$. Полученная при этом оценка (6,36) скорости сходимости процесса очень грубая. Можно было бы показать, что в действительности указанный процесс сходится гораздо быстрее.

Следует отметить, что последовательные приближения $u_k^{(n)}$, полученные указанным выше простым способом, при большом числе N узловых точек сходятся к точному решению u_k системы (1,36) все же очень медленно. Имеются различные приемы, позволяющие ускорить сходимость указанных последовательных приближений к точному решению, а также другие способы приближенного решения системы (1,36), быстрее приводящие к цели.

§ 37. Обзор некоторых результатов для более общих эллиптических уравнений

1. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в случае двух независимых переменных разрешима для любой односвязной области, если заданная на границе функция непрерывна. Для односвязной трехмерной области задача Дирихле не всегда имеет решение. У трехмерной области будет регулярной всякая точка P границы, если до этой точки можно дотронуться извне острием конуса K, полученного при вращении вокруг оси x_1 кривой

$$x_2 = f(x_1) = x_1^k,$$

где k — любое положительное число. Точнее это условие можно сформулировать так: в пространстве (x_1, x_2, x_3), где расположена область G, можно так выбрать оси координат с началом в точке P, что все точки, лежащие внутри конуса K и имеющие положительные абсциссы x_1, не превосходящие некоторого положительного числа η, располагаются вне области G. С другой стороны, Лебегом *) и независимо от него П. С. Урысоном **) было показано, что нерегулярной будет всякая точка P границы области G, обладающая такой окрестностью U_P, что при соответствующем выборе координатных осей все точки этой окрестности, не принадлежащие области G, не выходят из конуса, образованного вращением вокруг оси x_1 кривой

$$x_2 = e^{-\frac{1}{x_1}}, \quad x_1 > 0.$$

То же самое будет, если эту кривую заменить кривой

$$x_2 = F(x_1) = e^{-|\ln x_1|^{1+\varepsilon}} = x_1^{|\ln x_1|^{\varepsilon}},$$

где ε — любое положительное число.

Для n-мерного пространства ($n > 3$) роль функции $f(x_1)$ играет функция

$$\frac{x_1}{|\ln x_1|^{\frac{1}{n-3}}}, \tag{1,37}$$

роль функции $F(x_1)$ играет функция

$$\frac{x_1}{|\ln x_1|^{\frac{1}{n-3}+\varepsilon}}, \tag{2,37}$$

где ε — любое положительное число. Уравнения соответствующих конусов получатся, если выражения (1,37) или (2,37) приравнять $\sqrt{x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

Необходимое и достаточное условие регулярности точки было найдено Винером ***).

Изучен вопрос об устойчивости решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа относительно изменения границы области. Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ — сходящаяся к области G последовательность областей, каждая из которых содержит замкнутую область $\overline{G}$, а $\varphi(P)$ — произвольная непрерывная во всем пространстве функция. Обозначим через $u_n(P)$ гар-

*) Lebesque, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 24 (1907), 371—402.

**) П. С. Урысон, Math. Zeitschrift 23 (1925), 155—158.

***) См. М. В. Келдыш, Успехи матем. наук., вып. VIII (1941), 171—232.

моническую в G_n функцию, принимающую на границе области G_n значения $\varphi(P)$ $(n=1, 2, \ldots)$. Задача Дирихле называется устойчивой внутри области G, если последовательность $\{u_n(P)\}$ сходится при $n \to \infty$ в каждой точке G к обобщенному решению (в смысле п. 3 § 31) задачи Дирихле, соответствующему граничному условию $u=\varphi(P)$ на границе G.

Необходимое и достаточное условие устойчивости задачи Дирихле внутри области указали М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев. Построен пример односвязной области в трехмерном пространстве, для которой задача Дирихле разрешима при любой непрерывной граничной функции, но не является устойчивой внутри рассматриваемой области *).

2. На возможность решения первой краевой задачи для линейного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x_1, \ldots, x_n) u = f(x_1, \ldots, x_n), \quad (3,37)$$

где квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\alpha_i\alpha_j$ является положительно определенной при любых $x_1, \ldots, x_n$ из рассматриваемой области, оказывает существенное влияние знак коэффициента $a(x_1, \ldots, x_n)$. Если этот коэффициент принимает положительные значения, то даже в случае постоянных коэффициентов в уравнении (3,37) первая краевая задача для этого уравнения может не иметь решения или иметь не единственное решение, если область G достаточно велика. Так, например, уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2k^2 u = 0 \quad (4,37)$$

имеет решение $u_0 = \sin kx \sin ky$, которое обращается в нуль на границе квадрата Q со сторонами

$$x=0; \; y=0; \; x=\frac{\pi}{k}; \; y=\frac{\pi}{k}.$$

С другой стороны, легко показать, что если уравнение (4,37) в области G с кусочно гладкой границей Γ имеет ре-

*) См. сноску ***) на стр. 325.

шение u_0, которое обращается в нуль на Γ и обладает кусочно непрерывными первыми производными в $G+\Gamma$, то всякое другое достаточно гладкое решение u уравнения (4,37) должно на границе области удовлетворять соотношению

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u_0}{\partial n} u \, ds = 0. \tag{5,37}$$

Соотношение (5,37) получится, если произвести интегрирование по частям в левой части равенства

$$\iint\limits_{G} u_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2k^2 u \right) dx \, dy = 0$$

таким образом, чтобы исчезли производные по x и y от u в интегралах по области G. Поэтому первая краевая задача для уравнения (4,37), когда областью G служит квадрат, не может иметь гладкого решения, если заданная на границе функция не удовлетворяет соотношению (5,37).

Можно показать, что для уравнения (3,37) либо первая краевая задача имеет единственное решение при любой непрерывной функции, заданной на границе области G, и любой правой части f, либо задача имеет решение только для тех граничных функций и правых частей f, которые удовлетворяют конечному числу условий, и решение задачи неединственно.

Вообще при решении первой краевой задачи для эллиптического уравнения (3,37) случай, когда коэффициент a всюду $\leqslant 0$, существенно отличается от случая, когда этот коэффициент в некоторых точках положителен. В первом случае задача имеет единственное решение при любой непрерывной функции, заданной на границе области G, если 1) граница области G достаточно правильна, 2) коэффициенты a_{ij}, a_i, a и функция f удовлетворяют условию Гёльдера *)

*) Говорят, что функция $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\lambda > 0$ на множестве M, если существует такая постоянная K, что для любых двух точек $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ множества M выполняется неравенство

$$|\psi(x_1, \ldots, x_n) - \psi(y_1, \ldots, y_n)| \leqslant K \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{\lambda}{2}}.$$

в области G *). Если же коэффициент a принимает в некоторых точках рассматриваемой области положительные значения, то для обеспечения существования и единственности решения достаточно потребовать еще, чтобы область G была достаточно малой. Как показал В. В. Немыцкий **), даже для более общих уравнений (нелинейных) здесь важно, чтобы площадь области G была достаточно малой, диаметр же ее может быть как угодно большим.

О. А. Олейник показала в случае, когда всюду $a \leqslant 0$, для любой области, а в других случаях для достаточно малых областей, что условия, которые надо наложить на границу области для того, чтобы для нее можно было решить задачу Дирихле при всякой непрерывной функции, заданной на границе, не зависят от того, решается ли эта задача для уравнения Лапласа или для уравнения (3,37) ***).

С. Н. Бернштейн доказал существование решения задачи Дирихле для очень широкого класса нелинейных эллиптических уравнений. Обзор этих, а также других результатов для нелинейных эллиптических уравнений имеется в журнале «Успехи математических наук», вып. VIII, 1941 г. (статья С. Н. Бернштейна и И. Г. Петровского, стр. 8—26) и в книге Миранды *). В этой книге изложены наиболее важные разделы теории линейных и нелинейных эллиптических уравнений второго порядка и приведена подробная библиография.

3. Система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{0 \leqslant k_1 + \ldots + k_n \leqslant n_j} A_{ij}^{(k_1 \ldots k_n)}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = f_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, N)$$

называется эллиптической в некоторой области G, если определитель

$$\left| \sum_{k_1 + \ldots + k_n = n_j} A_{ij}^{(k_1 \ldots k_n)}(x_1, \ldots, x_n) \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} \right|$$

отличен от нуля при любых действительных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, сумма квадратов которых положительна, и любых $x_1, \ldots, x_n$

*) Миранда, Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, 1957, глава 5.

**) В. В. Немыцкий, Матем. сборник 41 (1934), 438—452.

***) О. А. Олейник, Матем. сборник. 24:1 (1949), 1—14.

из области G. Аналогично определяется эллиптичность нелинейной системы вблизи какого-нибудь ее решения.

Все достаточно гладкие, т. е. имеющие достаточное число непрерывных производных, решения эллиптических уравнений и эллиптических систем уравнений аналитичны, если левые части этих уравнений аналитичны по всем своим аргументам; мы предполагаем, что в правых частях этих уравнений находятся нули *). Впервые это было доказано С. Н. Бернштейном для эллиптических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными **).

4. Если однородное ($f \equiv 0$) эллиптическое уравнение (3,37) с достаточно гладкими коэффициентами имеет в некоторой ограниченной области G единственное решение первой краевой задачи для всякой непрерывной функции, заданной на границе, то справедлива теорема о равномерно сходящейся последовательности решений (аналог первой теоремы Гарнака): если последовательность решений равномерно сходится на границе G, то она также равномерно сходится во всей области G и притом к функции, удовлетворяющей тому же уравнению (3,37).

5. Теорема о монотонной последовательности решений (аналог второй теоремы Гарнака): допустим, что ограниченная область G такова, что при всякой непрерывной функции, заданной на ее границе, задача Дирихле имеет одно и только одно решение; тогда, если последовательность $u_n(x_1, \ldots, x_n)$ решений однородного ($f \equiv 0$) уравнения (3,37) сходится хотя бы в одной точке области G и во всех точках этой области $u_{n+1}(x_1, \ldots, x_n) \geqslant u_n(x_1, \ldots, x_n)$, то последовательность $u_n(x_1, \ldots, x_n)$ равномерно сходится во всякой области G', лежащей вместе со своей границей внутри G ***).

6. Если в уравнении (3,37) $a \equiv 0$ и $f \equiv 0$, то всякое решение уравнения (3,37) принимает наибольшее и наименьшее значения на границе G. Если в уравнении (3,37) $a \leqslant 0$ и $f \equiv 0$, то всякое решение уравнения (3,37), непрерывное в замкнутой области и отличное от постоянной, не может принимать внутри области наибольшее положительное

*) И. Г. Петровский, Матем. сборник 5 (47):1 (1939), 3—70.
**) С. Н. Бернштейн, Math. Annalen, 59 (1904), 20—76.
***) См., например, Д. Серрин, Математика (переводы), ИЛ, 2:6 (1958), 49—62.

значение или наименьшее отрицательное значение (см. сноску*) на стр. 241).

7. Решения уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=0 \tag{6,37}$$

обладают свойством среднего арифметического, если их рассматривать в римановом пространстве с соответствующим образом подобранной метрикой. Для таких уравнений можно строить решения, аналогичные потенциалу точки, потенциалу простого или двойного слоя для обычного уравнения Лапласа с двумя независимыми переменными *). Аналогичные этим потенциалам так называемые фундаментальные решения построены также для некоторых эллиптических систем **).

8. Теорема Лиувилля для аналитических функций также распространяется на некоторые эллиптические уравнения второго порядка. С. Н. Бернштейном ***) была доказана следующая теорема: всякое ограниченное, имеющее непрерывные частные производные первого и второго порядков на всей плоскости решение уравнения

$$A(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})\,u_{xx}+2B(\ )\,u_{xy}+C(\ )\,u_{yy}=0,$$

где A, B, C — ограниченные функции своих аргументов и $AC-B^2>0$, есть постоянная.

Е. М. Ландисом исследовано поведение решений линейных эллиптических уравнений второго порядка в различных бесконечных областях; в частности, доказаны теоремы, аналогичные теореме Фрагмена — Линделефа для аналитических функций ****).

9. Если все функции u_i, удовлетворяющие некоторой однородной линейной эллиптической системе вида (2,3) с n независимыми переменными и аналитическими коэффициентами, одновременно обращаются в нуль на некоторой $(n-1)$-мерной аналитической поверхности вместе со всеми их производ-

*) В. Феллер, Успехи матем. наук, VIII (1941), 232—248.

**) Э. Э. Леви, Успехи матем. наук VIII (1941), 249—292; Я. Б. Лопатинский, Украинский матем. журнал 3, № 1 (1951), 3—38.

***) С. Н. Бернштейн, Успехи матем. наук VIII (1941), 75—81.

****) Е. М. Ландис, ДАН СССР 107, № 4 (1956), 508—511; Успехи матем. наук 14:1 (85), 21—85.

ными до порядка $(n_i - 1)$, то они тождественно равны нулю во всей той области, где они удовлетворяют рассматриваемой системе.

Это утверждение получается, например, как следствие теоремы Гольмгрена о единственности решения задачи Коши для линейных систем с аналитическими коэффициентами, так как эллиптические системы не имеют действительных характеристик.

Единственность решения задачи Коши доказана также для линейных и квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с достаточно гладкими неаналитическими коэффициентами *). Кроме того, ряд результатов в этом направлении получен для линейных эллиптических уравнений высших порядков и линейных эллиптических систем **).

10. Если все коэффициенты a_{ij}, a_i, a и f эллиптического уравнения (3,37) в некоторой конечной области G имеют производные до порядка $k-2$ (где $k > 2$), удовлетворяющие условию Гёльдера, то все дважды непрерывно дифференцируемые внутри G решения этого уравнения имеют во всякой области G', лежащей со своей границей внутри G, производные до порядка k, удовлетворяющие условию Гёльдера. Аналогичное утверждение справедливо также для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка.

Решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ задачи Дирихле для уравнения (3,37) в области G с граничным условием $u = \varphi$ на границе G имеет в замкнутой области $\overline{G}$ производные до порядка k, удовлетворяющие условию Гёльдера, если: 1) граница области G в окрестности каждой своей точки может быть представлена параметрическими уравнениями $x_1 = x_1(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}), \ldots, x_n = x_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, правые части которых имеют производные k-го порядка, удовлетворяющие условию Гёльдера; 2) граничная функция φ обладает производными k-го порядка, удовлетворяющими условию Гёльдера; 3) коэффициенты a_{ij}, a_i, a и f имеют в $\overline{G}$ производные до порядка $k-2$, удовлетворяющие условию Гёльдера.

---

*) Е. М. Ландис, ДАН СССР **107**, № 5 (1956), 640—643; Cordes, Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen, № 11 (1956), 239—258; М. М. Лаврентьев, ДАН СССР **112**, № 2 (1957), 195—197. См. также Heinz, Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen, № 1 (1955), 1—12.

**) Calderon, American Journal of Mathematics, 80, № 1 (1958), 16—36; Hörmander, Mathematica Scandinavica, 7 (1959), 177—190.

Доказательства этих результатов, принадлежащих Хопфу и Шаудеру, имеются в указанной выше книге Миранды.

11. Для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+ \\ +c(x, y)u=f(x, y)$$

И. Н. Векуа исследовал вопрос о существовании и единственности решения, удовлетворяющего на границе области G условию

$$\alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma(x, y)u=\varphi(x, y),$$

где a, b, c, f, α, β, γ, φ — достаточно гладкие функции.

Оказывается, что число условий, которым должны удовлетворять функции f и φ для того, чтобы эта задача имела решение, и число линейно независимых решений соответствующей однородной задачи ($f\equiv 0$, $\varphi\equiv 0$) зависят от целого числа n, называемого индексом задачи. Индекс задачи n равен приращению, которое получает аргумент функции $\frac{\alpha(x, y)-i\beta(x, y)}{2\pi}$, когда точка (x, y) один раз обходит в положительном направлении кривую, ограничивающую область G.

Предположим для простоты формулировок, что область G односвязна и $c\equiv 0$, $\gamma\equiv 0$. Тогда, если $n\geqslant 0$, то указанная задача разрешима при любых f и φ, а число линейно независимых решений соответствующей однородной задачи равно $2n+2$ *). Если $n<0$, то задача разрешима только для тех f и φ, которые удовлетворяют некоторым условиям. Число этих условий равно $-2n-1$. Однородная задача в этом случае имеет только одно решение.

Рассматривались также краевые задачи более общего вида **).

12. Подробно исследовано поведение решений основных краевых задач для эллиптических уравнений при стремлении

---

*) Ср. условия разрешимости первой краевой задачи для уравнения (3,37) в п. 2 этого параграфа.

**) И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, 1948. И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, 1959.

к нулю малого параметра ε при старших производных; получено асимптотическое представление этих решений в виде рядов по степеням ε. В ряде случаев указанный предельный переход приводит к новой краевой задаче для уравнения с $\varepsilon = 0$.

Изучались также краевые задачи для уравнений, являющихся эллиптическими внутри рассматриваемой области и параболическими на части ее границы (или на некотором внутреннем подмножестве).

Подробный обзор результатов, связанных с этим кругом вопросов, содержится в статье М. И. Вишика, А. Д. Мышкиса и О. А. Олейник «Дифференциальные уравнения с частными производными» в книге «Математика в СССР за сорок лет», том 1, Физматгиз, 1959, стр. 599—603.

13. Обобщенным решением эллиптического уравнения

$$\sum_{0 \leqslant k_1 + \ldots + k_n \leqslant m} A^{(k)}_{k_1 \ldots k_n}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = f(x_1, \ldots, x_n) \qquad (7,37)$$

в области G называется непрерывная функция $u(x_1, \ldots, x_n)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству (ср. § 9)

$$\int_G \ldots \int [uM(\sigma) - f\sigma] \, dx_1 \ldots dx_n = 0$$

при любой функции $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$, имеющей в G непрерывные производные до порядка m и равной нулю в окрестности границы G. Здесь

$$M(\sigma) \equiv \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \sum_{k_1 + \ldots + k_n = k} \frac{\partial^k (A^{(k)}_{k_1 \ldots k_n} \sigma)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}.$$

Оказывается, что всякое обобщенное решение эллиптического уравнения (7,37) в области G обладает непрерывными производными до порядка m и удовлетворяет этому уравнению в обычном смысле, если в области G функция f имеет непрерывные производные до порядка $2\left[\frac{n}{2}\right]$, а коэффициенты $A^{(k)}_{k_1 \ldots k_n}$, стоящие в уравнении (7,37) при производных порядка k, имеют непрерывные производные до порядка $k+2\left[\frac{n}{2}\right]$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ m)$ *).

Бо́льшая гладкость коэффициентов уравнения (7,37) влечет за собой бо́льшую гладкость решения. В частности, если все коэффициенты $A^{(k)}_{k_1\ldots k_n}$ и f имеют в области G непрерывные производные любого порядка, то всякое обобщенное решение уравнения (7,37) также обладает производными любого порядка.

Дифференциальное уравнение с частными производными, все обобщенные решения которого обладают производными любого порядка, называется *гипоэллиптическим*. Очевидно, что всякое линейное эллиптическое уравнение с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами является гипоэллиптическим. Примером гипоэллиптического, но не эллиптического уравнения может служить уравнение теплопроводности (см. главу 4). Достаточные (а для уравнений с постоянными коэффициентами — и необходимые) условия гипоэллиптичности найдены Хёрмандером **).

14. Подобно тому, как для уравнения Лапласа характерной краевой задачей является задача Дирихле, для «полигармонического» уравнения

$$\Delta^m u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^m u=0$$

характерной краевой задачей является задача определения решения u этого уравнения внутри некоторой области G по его значениям и значениям его нормальных производных до порядка $m-1$ включительно на границе G. При $m=2$ и $n=2,3$ к этой задаче приводят важные проблемы теории упругости. Существование и единственность обычного решения этой задачи доказаны в предположении достаточной гладкости границы области G и заданных на ней функций. При $m=2$ и $n=2$ достаточно потребовать, чтобы область G была ограничена конечным числом замкнутых линий, у каж-

---

*) См. Й о н, Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, ИЛ, 1958.

**) Х ё р м а н д е р, К теории общих дифференциальных операторов в частных производных, ИЛ, 1959; H ö r m a n d e r, Communications on pure and applied mathematics, 11 (1958), № 1, 197—218.

дой из которых координаты являются трижды непрерывно дифференцируемыми функциями длины дуги, и чтобы функции, заданные на этих линиях, были непрерывными вместе со своими первыми производными по дуге. С. Л. Соболев доказал существование и единственность обобщенного решения этой задачи при самых широких предположениях о границе G. Он допускал, что эта граница состоит из нескольких кусков разной размерности. При этом оказалось, что на куске размерности $n-r$ надо задавать значения функции u и ее производных до порядка $m-\left[\frac{r}{2}\right]-1$.

Решение С. Л. Соболева является обобщенным в том смысле, что функция u и ее производные не обязательно принимают заданные значения во всех граничных точках, а только «в среднем». (Точное определение этого «в среднем» см. в книге С. Л. Соболева «Некоторые применения функционального анализа в математической физике», 1950, стр. 111—113.)

15. Для некоторого класса линейных эллиптических систем, названных сильно эллиптическими, М. И. Вишик *) исследовал вопрос о разрешимости краевых задач, аналогичных первой и второй краевым задачам для эллиптического уравнения второго порядка. (Этот класс содержит, в частности, одно линейное эллиптическое уравнение общего вида (7,37).) Оказывается, что так же, как и для уравнения (3,37), либо такая задача имеет единственное решение при любых заданных граничных функциях и правых частях системы, либо решение неединственно и для существования решения необходимо выполнение конечного числа условий для граничных функций и правых частей. Найдены достаточные условия для существования и единственности решения первой и второй краевых задач, которым должны удовлетворять коэффициенты системы. Отметим, что так же, как и для уравнения (3,37), для сильно эллиптических систем в достаточно малых областях всегда имеют место существование и единственность решения первой краевой задачи.

---

*) М. И. Вишик, Матем. сборник 29 (71):3 (1951), 615—676; ДАН СССР 86, № 4 (1952), 645—648. См. также Gårding, Mathematica Scandinavica 1 (1953), 55—72; Browder, Annals of Math. Studies 33 (1954), 15—51; О. В. Гусева, ДАН СССР 102, № 6 (1955), 1069—1072; Nirenberg, Communications on pure and applied mathematics, 8, № 4 (1955), 649—675.

Как показывают примеры, построенные А. В. Бицадзе еще в 1948 г., первая краевая задача с однородными граничными условиями для эллиптической системы с двумя независимыми переменными может иметь бесконечное множество линейно независимых решений в как угодно малом круге *). В последнее время получен ряд интересных результатов о существовании и единственности решений краевых задач для общих линейных эллиптических систем со многими независимыми переменными **).

---

*) А. В. Бицадзе, Успехи матем. наук 3:6 (28) (1948), 241—242.

**) М. Шехтер, Математика (переводы), ИЛ 4:5 (1960), 93—122, 4:6 (1960), 3—21; Agmon, Douglis, Nirenberg, Communications on pure and applied mathematics, 12 (1959), № 4, 623—727.