ГЛАВА IV

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 38. Первая краевая задача. Теорема о максимуме и минимуме

1. В качестве простейшего представителя параболических уравнений мы будем рассматривать уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Основные свойства решений этого уравнения не зависят от n. Мы ограничимся для простоты рассмотрением случая $n=1$.

Параболические уравнения наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии (см. § 1).

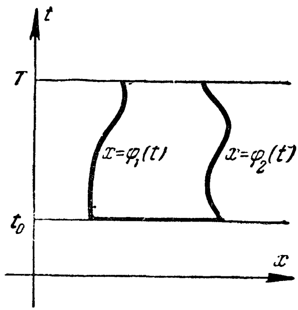

Рис. 18.

Типичной краевой задачей для параболических уравнений является следующая задача. Обозначим через G криволинейный четырехугольник на плоскости (t, x), ограниченный отрезками прямых $t=t_0$ и $t=T$ $(T>t_0)$ и кривыми $x=\varphi_1(t)$ и $x=\varphi_2(t)$, где φ_1 и φ_2 — непрерывные функции и $\varphi_2(t)>\varphi_1(t)$ при $t_0\leqslant t\leqslant T$ (рис. 18). Часть границы области G, состоящую из отрезка прямой $t=t_0$ и кривых $x=\varphi_1(t)$ и $x=\varphi_2(t)$, обозначим через Γ (на рис. 18 эта часть границы обозначена жирными линиями).

Требуется найти непрерывную в области G и на ее границе функцию $u(t, x)$, удовлетворяющую внутри G уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1,38}$$

и принимающую на Γ значения заданной на Γ непрерывной функции f.

В теории уравнения (1,38) поставленная задача играет такую же основную роль, как задача Дирихле в теории уравнения Лапласа. Она называется первой краевой задачей для уравнения теплопроводности. В том случае, когда область G является прямоугольником $Q: 0<x<l$, $0<t<T$, к первой краевой задаче для уравнения теплопроводности приводит, например, задача о нахождении температуры $u(t, x)$ в теплоизолированном стержне, если известна его начальная температура при $t=0$ и известна температура на концах стержня в последующее время. При решении этой задачи очень существенно, что решение ищется при $t>0$. Как будет показано позже, аналогичная задача для отрицательных значений t, вообще говоря, не имеет решения. Уравнение (1,38) в противоположность уравнению колебаний струны (1,20) существенно меняется при замене t на $-t$. Это — типичное уравнение необратимого процесса.

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать только непрерывные решения уравнения теплопроводности, не оговаривая этого каждый раз.

2. Теорема о максимуме и минимуме и ее следствия. *Всякое решение $u(t, x)$ уравнения теплопроводности* (1,38), *определенное и непрерывное в криволинейном четырехугольнике G и на его границе, принимает наибольшее и наименьшее значения на границе Γ, т. е. или на нижнем основании криволинейного четырехугольника G или на его боковых сторонах.*

Так как теорема о минимуме сводится к теореме о максимуме переменной знака у u, то мы ограничимся доказательством только теоремы о максимуме.

Метод доказательства аналогичен методу И. И. Привалова для доказательства теоремы о максимуме и минимуме гармонических функций *). Обозначим через M максимум

*) См. Матем. сборник 32 (1925), 464—471.

функции $u(t, x)$ в $G+\Gamma$, а через m — максимум значений $u(t, x)$ на Γ. Допустим, что существует такое решение u, для которого $M>m$, т. е. для которого теорема о максимуме не верна. Пусть эта функция принимает значение M в точке (t^*, x^*), где $t^*>t_0$ и $\varphi_1(t^*)<x^*<\varphi_2(t^*)$.

Рассмотрим функцию

$$v(t, x)=u(t, x)+\frac{M-m}{4l^2}(x-x^*)^2,$$

где l равно $\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant T}\varphi_2(t)-\min\limits_{t_0\leqslant t\leqslant T}\varphi_1(t)$.

На боковых сторонах G и на его нижнем основании

$$v(t, x)\leqslant m+\frac{M-m}{4}=\frac{M}{4}+\frac{3}{4}m=\theta M,$$

где $0<\theta<1$, а

$$v(t^*, x^*)=M.$$

Следовательно, $v(t, x)$, так же как и $u(t, x)$, не принимает максимального значения ни на нижнем основании G, ни на его боковых сторонах. Пусть $v(t, x)$ принимает максимальное значение в точке (t_1, x_1), где $t_1>t_0$ и $\varphi_1(t_1)<x_1<\varphi_2(t_1)$. В этой точке должно быть $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\leqslant 0$ и $\frac{\partial v}{\partial t}\geqslant 0$ $\left(\text{если } t_1<T,\right.$ то $\frac{\partial v}{\partial t}$ обязательно равно нулю в этой точке; если же $t_1=T$, то $\left.\frac{\partial v}{\partial t}\geqslant 0\right)$. Поэтому в точке (t_1, x_1) должно быть

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\geqslant 0 \tag{2,38}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{M-m}{2l^2}=-\frac{M-m}{2l^2}<0,$$

что противоречит (2,38).

Следствия. 1) *Решение первой краевой задачи в криволинейном четырехугольнике G единственно.* Действительно, разность двух решений равна нулю на нижнем основании и на боковых сторонах G и в силу теоремы о максимуме и минимуме равна тождественно нулю.

2) *Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности непрерывно зависит от функций, заданных на боковых сторонах и на нижнем основании криволинейного четырехугольника* G. Это также следует из того, что разность двух решений u_1 и u_2 уравнения (1,38) в криволинейном четырехугольнике G принимает наибольшее и наименьшее значения на нижнем основании или на боковых сторонах G.

Задача 1. Докажите усиленную теорему о максимуме и минимуме: решение $u(t, x)$ уравнения теплопроводности (1,38), определенное и непрерывное в замкнутом криволинейном четырехугольнике $\overline{G}$ и отличное от постоянной, не может принимать наибольшее или наименьшее значение в какой-нибудь внутренней точке верхнего основания $\overline{G}$.

Задача 2. Докажите, что если функция $u(t, x)$, непрерывная в замкнутом прямоугольнике $\{t_0 \leqslant t \leqslant T,\ X_1 \leqslant x \leqslant X_2\}$ и отличная от постоянной, удовлетворяет внутри этого прямоугольника уравнению теплопроводности (1,38) и неравенству $u(t, x) \geqslant u(T, X_1)$ (или $u(t, x) \geqslant u(T, X_2)$), причем в точке (T, X_1) (соответственно (T, X_2)) существует производная $\frac{\partial u}{\partial x}$, то $\frac{\partial u}{\partial x}(T, X_1) > 0$ $\left(\text{соответственно } \frac{\partial u}{\partial x}(T, X_2) < 0\right)$.

Задача 3. Докажите единственность решения $u(t, x)$ уравнения теплопроводности (1,38), непрерывного вместе с производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ в прямоугольнике $\{t_0 \leqslant t \leqslant T,\ X_1 \leqslant x \leqslant X_2\}$ и удовлетворяющего условиям: $u(0, x) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x} - a_1(t)u = \varphi_1(t)$ при $x = X_1$, $\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(t)u = \varphi_2(t)$ при $x = X_2$, где a_1 и a_2 — заданные непрерывные неотрицательные функции t.

§ 39. Решение первой краевой задачи для прямоугольника методом Фурье

Для прямоугольника Q:

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

первую краевую задачу можно сформулировать так: *найти непрерывную в* Q *функцию* $u(t, x)$, *удовлетворяющую*