2) *Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности непрерывно зависит от функций, заданных на боковых сторонах и на нижнем основании криволинейного четырехугольника* G. Это также следует из того, что разность двух решений u_1 и u_2 уравнения (1,38) в криволинейном четырехугольнике G принимает наибольшее и наименьшее значения на нижнем основании или на боковых сторонах G.

Задача 1. Докажите усиленную теорему о максимуме и минимуме: решение $u(t, x)$ уравнения теплопроводности (1,38), определенное и непрерывное в замкнутом криволинейном четырехугольнике $\overline{G}$ и отличное от постоянной, не может принимать наибольшее или наименьшее значение в какой-нибудь внутренней точке верхнего основания $\overline{G}$.

Задача 2. Докажите, что если функция $u(t, x)$, непрерывная в замкнутом прямоугольнике $\{t_0 \leqslant t \leqslant T, X_1 \leqslant x \leqslant X_2\}$ и отличная от постоянной, удовлетворяет внутри этого прямоугольника уравнению теплопроводности (1,38) и неравенству $u(t, x) \geqslant u(T, X_1)$ (или $u(t, x) \geqslant u(T, X_2)$), причем в точке (T, X_1) (соответственно (T, X_2)) существует производная $\frac{\partial u}{\partial x}$, то $\frac{\partial u}{\partial x}(T, X_1) > 0$ $\left(\text{соответственно } \frac{\partial u}{\partial x}(T, X_2) < 0\right)$.

Задача 3. Докажите единственность решения $u(t, x)$ уравнения теплопроводности (1,38), непрерывного вместе с производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ в прямоугольнике $\{t_0 \leqslant t \leqslant T, X_1 \leqslant x \leqslant X_2\}$ и удовлетворяющего условиям: $u(0, x) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x} - a_1(t) u = \varphi_1(t)$ при $x = X_1$, $\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(t) u = \varphi_2(t)$ при $x = X_2$, где a_1 и a_2 — заданные непрерывные неотрицательные функции t.

§ 39. Решение первой краевой задачи для прямоугольника методом Фурье

Для прямоугольника Q:

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

первую краевую задачу можно сформулировать так: *найти непрерывную в* Q *функцию* $u(t, x)$, *удовлетворяющую* *внутри Q уравнению* (1,38), *а на границе Q начальному условию*

$$u(0, x) = \varphi(x)$$

и граничным условиям

$$u(t, 0) = f_1(t), \quad u(t, l) = f_2(t), \quad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{1,39}$$

При этом предполагается, что функции $\varphi(x)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ непрерывны и $\varphi(0) = f_1(0)$, $\varphi(l) = f_2(0)$.

Так как уравнение (1,38) не изменяется при замене t на $t + t_0$ и x на $x + x_0$, то все, что будет сказано в дальнейшем о прямоугольнике Q, одинаково справедливо и для всякого другого прямоугольника со сторонами, параллельными осям Ox и Ot.

В этом параграфе мы докажем существование решения первой краевой задачи для прямоугольника Q методом Фурье.

Основной недостаток этого метода состоит в том, что он непосредственно применим лишь к задаче с однородными граничными условиями $u(t, 0) = 0$, $u(t, l) = 0$, хотя другим методом существование решения первой краевой задачи можно доказать при любых $u(t, 0) = f_1(t)$ и $u(t, l) = f_2(t)$, удовлетворяющих условию, сформулированному выше.

Однако, если мы умеем найти какое-либо решение $v(t, x)$ уравнения (1,38), удовлетворяющее некоторым определенным граничным условиям $v(t, 0) = \tilde{f}_1(t)$, $v(t, l) = \tilde{f}_2(t)$, то можно применить метод Фурье к решению этого уравнения при произвольно заданном начальном условии $u(0, x) = \varphi(x)$ и этих граничных условиях $u(t, 0) = \tilde{f}_1(t)$ и $u(t, l) = \tilde{f}_2(t)$. Для этого достаточно найти методом Фурье решение $u^*(t, x)$ уравнения (1,38), удовлетворяющее начальному условию $u^*(0, x) = \varphi(x) - v(0, x)$ и однородным граничным условиям $u^*(t, 0) = 0$, $u^*(t, l) = 0$. Если $u^*(t, x)$ найдено, то функция

$$u(t, x) = u^*(t, x) + v(t, x)$$

решает поставленную задачу.

Существование решения первой краевой задачи в общем случае доказано методом сеток в § 42.

Мы будем искать в Q решение уравнения (1,38), удовлетворяющее условиям: $u(0, x) = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль при $x=0$ и $x=l$, и $u(t, 0)=u(t, l)=0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Аналогично тому, как это делалось при решении смешанной задачи для гиперболического уравнения, мы будем искать функцию $u(t, x)$ в виде ряда

$$u(t, x)=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \tag{2,39}$$

у которого каждый член удовлетворяет уравнению теплопроводности и обращается в нуль при $x=0$ и $x=l$. Для этого должно быть

$$\frac{T_k'(t)}{T_k(t)}=\frac{X_k''(x)}{X_k(x)}=-\lambda_k^2, \tag{3,39}$$

$$X_k(0)=X_k(l)=0. \tag{4,39}$$

Здесь $-\lambda_k^2$ означают некоторые постоянные. Что они должны быть отрицательными, доказывается так же, как в § 20. Из уравнений (3,39) и условий (4,39) находим

$$X_k(x)=A_k \cos \lambda_k x+B_k \sin \lambda_k x; \quad A_k=0; \quad \lambda_k l=k\pi,$$

где $k=1, 2, \ldots$ Итак,

$$X_k(x)=B_k \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Подставляя найденное значение λ_k в уравнение (3,39) для $T_k(t)$, получим

$$T_k(t)=B_k^* e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2} t},$$

где B_k^* — постоянная. Отсюда

$$u(t, x)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2} t} \sin \frac{k\pi}{l} x. \tag{5,39}$$

Здесь C_k — постоянные. Они определяются из начального условия

$$u(0, x)=\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi}{l} x. \tag{6,39}$$

Так как мы предположили, что $\varphi(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и обращается в нуль при $x=0$ и $x=l$, то коэффициенты C_k определяются по формулам Фурье; они ограничены; ряд (6,39) с такими коэффициентами равномерно и абсолютно сходится к $\varphi(x)$, как известно из теории тригонометрических рядов. Так как при $t \geqslant 0$

$$0 < e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \leqslant 1,$$

то ряд (5,39) при $t \geqslant 0$ также сходится абсолютно и равномерно. Поэтому функция $u(t, x)$, определяемая этим рядом, непрерывна в прямоугольнике $Q: 0 \leqslant x \leqslant l$; $0 \leqslant t \leqslant T$, и принимает заданные значения на его нижнем основании и на его боковых сторонах. Остается показать, что внутри Q и на его верхнем основании она удовлетворяет уравнению теплопроводности. Для этого достаточно показать, что ряды, полученные из (5,39) почленным однократным дифференцированием по t или двукратным почленным дифференцированием по x, также абсолютно и равномерно сходятся при $t \geqslant t_0 > 0$, каково бы ни было $t_0 > 0$. А это последнее утверждение следует из того, что при всяком положительном t_0

$$\frac{k^2\pi^2}{l^2} e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t_0} < 1,$$

если k достаточно велико.

Совершенно так же можно доказать существование у функции $u(t, x)$ при $t > 0$ непрерывных производных всех порядков по x и t. Пользуясь этим, легко показать, что, оставляя прежние, нулевые, условия при $x=0$ и $x=l$, только что построенную функцию $u(t, x)$, вообще говоря, нельзя продолжить в сторону отрицательных t так, чтобы она удовлетворяла уравнению (1,38). Для этого необходимо, чтобы $\varphi(x)$ имела производные всех порядков. Действительно, если бы такое продолжение было возможно, то мы получили бы решение уравнения теплопроводности в некотором прямоугольнике Q_1:

$$0 < x < l, \quad -\varepsilon \leqslant t \leqslant 0,$$

которое обращается в нуль при $x=0$ и $x=l$. Если $\frac{\partial u}{\partial x}(-\varepsilon, x)$ непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant l$, то, применяя к этому прямоугольнику все тё рассуждения, которые мы прежде провели для Q, мы найдем, что функция $u(0, x)$, т. е. $\varphi(x)$, должна иметь производные всех порядков. (Можно показать, что предположение о непрерывности $\frac{\partial u}{\partial x}(-\varepsilon, x)$ при $x=0$ и $x=l$ является несущественным.)

Если бы даже функция $u(0, x)=\varphi(x)$ была такой, что для нее возможно было бы решить первую краевую задачу в прямоугольнике Q_1 при нулевых условиях на концах интервала $(0, l)$ и начальном условии $u(0, x)=\varphi(x)$, то это решение можно было бы как угодно сильно изменить при как угодно малых отрицательных t, изменяя как угодно мало функцию $\varphi(x)$ и ее производные до произвольного фиксированного порядка k. Для этого, как легко проверить, достаточно к прежнему решению прибавить какой-нибудь член с достаточно большим номером из ряда (5,39) с произвольно малым постоянным множителем. Поэтому в то время, как первая краевая задача для уравнения теплопроводности корректно поставлена для положительных t, она некорректно поставлена для отрицательных t, если начальные условия относить к $t=0$ (ср. § 8). Здесь еще раз видна неравноправность положительных и отрицательных значений t для уравнения теплопроводности (1,38).

Задача. Докажите, что решение $u(t, x)$ первой краевой задачи для полуполосы $\{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t < \infty\}$ с условиями $u(0, x)=\varphi(x)$, $u(t, 0)=0$, $u(t, l)=0$ стремится к нулю при $t \to \infty$ равномерно по x.

§ 40. Задача Коши

1. Постановка задачи. Требуется определить при $t \geqslant 0$ непрерывную ограниченную функцию $u(t, x)$, которая при $t>0$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (1,38), а при $t=0$ обращается в заданную непрерывную ограниченную функцию $\varphi(x)$, определенную при всех действительных значениях x.

К этой задаче приводит, например, задача о распространении тепла в бесконечном теплоизолированном стержне.

2. Теорема о максимуме и минимуме для полосы и ее следствия. *Всякое решение $u(t, x)$ уравнения* (1,38), *непрерывное и ограниченное в полосе* $S\,\{0 \leqslant t < T \leqslant \infty,$