прямоугольнику все те рассуждения, которые мы прежде провели для $Q$, мы найдем, что функция $u(0, x)$, т. е. $\varphi(x)$, должна иметь производные всех порядков. (Можно показать, что предположение о непрерывности $\frac{\partial u}{\partial x}(-\varepsilon, x)$ при $x=0$ и $x=l$ является несущественным.)

Если бы даже функция $u(0, x)=\varphi(x)$ была такой, что для нее возможно было бы решить первую краевую задачу в прямоугольнике $Q_1$ при нулевых условиях на концах интервала $(0, l)$ и начальном условии $u(0, x)=\varphi(x)$, то это решение можно было бы как угодно сильно изменить при как угодно малых отрицательных $t$, изменяя как угодно мало функцию $\varphi(x)$ и ее производные до произвольного фиксированного порядка $k$. Для этого, как легко проверить, достаточно к прежнему решению прибавить какой-нибудь член с достаточно большим номером из ряда (5,39) с произвольно малым постоянным множителем. Поэтому в то время, как первая краевая задача для уравнения теплопроводности корректно поставлена для положительных $t$, она некорректно поставлена для отрицательных $t$, если начальные условия относить к $t=0$ (ср. § 8). Здесь еще раз видна неравноправность положительных и отрицательных значений $t$ для уравнения теплопроводности (1,38).

Задача. Докажите, что решение $u(t, x)$ первой краевой задачи для полуполосы $\{0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t < \infty\}$ с условиями $u(0, x)=\varphi(x)$, $u(t, 0)=0$, $u(t, l)=0$ стремится к нулю при $t \to \infty$ равномерно по $x$.

## § 40. Задача Коши

**1.** Постановка задачи. Требуется определить при $t \geqslant 0$ непрерывную ограниченную функцию $u(t, x)$, которая при $t>0$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (1,38), а при $t=0$ обращается в заданную непрерывную ограниченную функцию $\varphi(x)$, определенную при всех действительных значениях $x$.

К этой задаче приводит, например, задача о распространении тепла в бесконечном теплоизолированном стержне.

**2.** Теорема о максимуме и минимуме для полосы и ее следствия. *Всякое решение $u(t, x)$ уравнения* (1,38), *непрерывное и ограниченное в полосе* $S\ \{0 \leqslant t < T \leqslant \infty,$

$-\infty < x < \infty\}$, *удовлетворяет в этой полосе неравенствам*

$$M \geqslant u(t, x) \geqslant m,$$

*где* $M = \sup\limits_{-\infty < x < \infty} u(0, x)$, $m = \inf\limits_{-\infty < x < \infty} u(0, x)$.

Докажем, что $u(t, x) \leqslant M$ (доказательство второго неравенства сводится к первому переменой знака у $u$).

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Покажем, что $u(t_0, x_0) \leqslant M + \varepsilon$ в любой точке $(t_0, x_0)$ полосы $S$. Рассмотрим функцию $w(t, x) = 2t + x^2$, которая является решением уравнения (1,38). Положим $N = \sup\limits_S |u(t, x)|$. Функция $\frac{\varepsilon w(t, x)}{w(t_0, x_0)} + M - u(t, x)$, удовлетворяющая в $S$ уравнению (1,38), неотрицательна при $t = 0$ и при $|x| = \sqrt{\frac{(N-M)\, w(t_0, x_0)}{\varepsilon}} + |x_0|$, так как при этом значении $|x|$

$$\frac{\varepsilon w(t, x)}{w(t_0, x_0)} \geqslant \frac{\varepsilon x^2}{w(t_0, x_0)} \geqslant N - M.$$

По теореме о максимуме и минимуме для конечной области (п. 2 § 38) эта функция должна быть неотрицательной всюду в прямоугольнике $\left\{0 \leqslant t < T, |x| \leqslant \sqrt{\frac{(N-M)\, w(t_0, x_0)}{\varepsilon}} + |x_0|\right\}$, в котором лежит точка $(t_0, x_0)$. Следовательно, в этом прямоугольнике $u(t, x) \leqslant M + \frac{\varepsilon w(t, x)}{w(t_0, x_0)}$, откуда $u(t_0, x_0) \leqslant M + \varepsilon$. Так как точка $(t_0, x_0)$ и число $\varepsilon$ произвольны, то из последнего неравенства вытекает, что $u(t, x) \leqslant M$ всюду в $S$.

Следствия. 1) *Ограниченное решение задачи Коши для уравнения* (1,38) *в полосе* $S$ *единственно.*

2) *Решение задачи Коши для уравнения* (1,38) *в классе ограниченных функций непрерывно зависит от начального условия, заданного при* $t = 0$.

Эти утверждения вытекают из того, что разность двух ограниченных решений $u_1$ и $u_2$ уравнения (1,38) в полосе $S$ по модулю не превосходит $\sup\limits_{-\infty < x < \infty} |u_1(0, x) - u_2(0, x)|$.

Замечание. Мы доказали, что решение задачи Коши в классе ограниченных функций единственно. Справедливо более сильное утверждение.

Пусть $f(x) = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} |u(t, x)|$. Если $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1,38) при $t > 0$, $u(0, x) = 0$ при $-\infty < x < +\infty$ и существует постоянная $C$ такая, что

$$f(x)\, e^{-Cx^2} \to 0 \text{ при } |x| \to \infty,$$

то $u(t, x) \equiv 0$.

Это предложение легко доказать (мы предоставляем это читателю) так же, как была доказана единственность рассматриваемой задачи в классе ограниченных функций, если вместо функции $w(t, x)$ рассмотреть функцию $W = 8(C+1)^2 t + e^{[8(C+1)^2 t + (C+1)]\, x^2}$, которая положительна при $t > 0$ и удовлетворяет условию $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial t} \leqslant 0$ при достаточно малом $t$. Для функций, удовлетворяющих условию $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial t} \leqslant 0$, верна теорема о минимуме.

А. Н. Тихонов*) построил для любого $\varepsilon > 0$ решения уравнения (1,38), которые не равны тождественно нулю, но для которых $u(0, x) = 0$ при $-\infty < x < +\infty$ и $f(x)\, e^{-x^{2+\varepsilon}} \to 0$ при $|x| \to \infty$.

**3.** Докажем, что решение нашей задачи дается формулами

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi \text{ при } t > 0, \qquad (1,40)$$

$$u(0, x) = \varphi(x). \qquad (2,40)$$

Интеграл (1,40) называется *интегралом Пуассона*.

Легко проверить, что интеграл (1,40) сходится при всех положительных $t$. Точно так же нетрудно проверить, что сходятся интегралы, полученные из (1,40) дифференцированием под знаком интеграла по $t$ и по $x$, повторенным сколько угодно раз. При этом все эти интегралы равномерно сходятся в окрестности любой точки $(t, x)$, если $t > 0$. Отсюда следует, что при $t > 0$ существует как функция $u(t, x)$, определенная формулой (1,40), так и все ее производные по $t$ и $x$ как угодно высоких порядков. Так как подынтегральная функция удовлетворяет уравнению (1,38) при $t > 0$, то отсюда

*) Матем. сборник 42:2 (1935), 199—216.

следует, что и сама функция $u(t, x)$ удовлетворяет этому уравнению при $t > 0$.

Покажем, что определенная формулой (1,40) функция $u(t, x)$ ограничена при $t > 0$. Для этого заметим, что если $M_1 = \max\limits_{-\infty < x < \infty} |\varphi(x)|$, то

$$|u(t, x)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{M_1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi = \frac{M_1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = M_1.$$

Остается показать, что определенная нами функция $u(t, x)$ непрерывна при $t = 0$, т. е. что при всяком $x_0$

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi - \varphi(x_0) \right| < \varepsilon, \tag{3,40}$$

если $t$ и $|x - x_0|$ достаточно малы. Заметим прежде всего, что для этого нам достаточно доказать, что

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi - \varphi(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4,40}$$

при достаточно малом $t$ и любом $x$ из некоторой окрестности точки $x_0$, потому что $|\varphi(x) - \varphi(x_0)|$ мал при достаточно малом $|x - x_0|$ в силу непрерывности функции $\varphi(x)$.

Для доказательства соотношения (4,40) перепишем интеграл Пуассона (1,40), положив $\xi = x + 2\sqrt{t}\,\zeta$, в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\sqrt{t}\,\zeta)\, e^{-\zeta^2} d\zeta$$

и заметим, что

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

В силу ограниченности $\varphi(x)$, при достаточно большом $N$ и любом $x$ интегралы

$$\int_{-\infty}^{-N} \varphi(x+2\sqrt{t}\,\zeta)\, e^{-\zeta^2} d\zeta; \quad \int_{-\infty}^{-N} \varphi(x)\, e^{-\zeta^2} d\zeta;$$

$$\int_{N}^{\infty} \varphi(x+2\sqrt{t}\,\zeta)\, e^{-\zeta^2} d\zeta; \quad \int_{N}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-\zeta^2} d\zeta$$

как угодно малы по абсолютной величине. Поэтому при достаточно большом $N$ и любом $x$ с как угодно большой точностью

$$u(t, x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{N} \varphi(x+2\sqrt{t}\,\zeta)\, e^{-\zeta^2} d\zeta,$$

а

$$\varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{N} \varphi(x)\, e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

Но при достаточно малом $t$ и любом $x$ из некоторой окрестности точки $x_0$ правые части этих приближенных равенств как угодно близки в силу непрерывности $\varphi(x)$. Отсюда следует (4,40).

4. Таким образом доказано, что единственным ограниченным решением поставленной в начале настоящего параграфа задачи является решение, определенное равенствами (1,40), (2,40).

Из этих формул следует, в частности, что если $\varphi(x)$ равна нулю всюду, за исключением как угодно малого интервала значений $x$, на котором она положительна, то решение $u(t, x)$ будет положительным при всех значениях $x$ и каком угодно фиксированном $t > 0$. Отсюда следует парадоксальное утверждение, что теплота распространяется в стержне с бесконечной скоростью. Физически это, конечно, невозможно. Но такой вывод с неизбежностью следует, если допустить, что распространение теплоты в стержне точно описывается уравнением (1,38). Очевидно, гипотезы, принятые нами при выводе этого уравнения, неточно оправдываются на опыте.

Практика показывает, однако, что уравнение (1,38) все же дает достаточно хорошее приближенное описание реального физического процесса распространения теплоты.

Задача 1. Пусть $u(t, x)$ — ограниченное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (1,38) в полуплоскости $t > 0$. Докажите, что для любого $x$ справедливо равенство

$$\lim_{t \to \infty} u(t, x) = \frac{a+b}{2},$$

если $\lim\limits_{x \to -\infty} u(0, x) = a$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} u(0, x) = b$.

Задача 2. Докажите, что задача Коши для уравнения теплопроводности (1,38) с начальным условием, заданным при $t = 0$, поставлена некорректно в любой полосе $\{-T < t < 0,\ -\infty < x < \infty\}$.

## § 41. Обзор некоторых дальнейших исследований уравнений параболического типа

**1.** Доказаны существование и единственность решений первой краевой задачи для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \tag{1,41}$$

при любом $n$. Эта задача в простейшем случае формулируется следующим образом.

Ищется непрерывная функция $u(t, x_1, \ldots, x_n)$, определенная на замыкании области $G$, ограниченной кусками гиперплоскостей $t = 0$ и $t = T$ («снизу» и «сверху»), а по бокам одной или несколькими поверхностями с непрерывно вращающейся касательной гиперплоскостью, которая нигде не перпендикулярна оси $Ot$. Функция $u$ должна удовлетворять уравнению (1,41) внутри $G$ и совпадать с некоторой функцией $f$, заданной на боковой поверхности $S$ и на нижнем основании $t=0$. Эта функция предполагается непрерывной на всем том замкнутом множестве, где она определена. Единственность решения задачи и непрерывная зависимость решения от функции $f$ доказываются в точности так же, как это делалось в § 38.

Первую краевую задачу можно ставить и для областей более общего вида. Найдены условия, которым должна